Aufgaben zur Vorlesung
Geometrische Analysis

Blatt 6 J. Lohkamp
WS 2005/06 Abgabe: Mittwoch, 07.12.2005 in den Übungen

---

1. Gegeben sei $X = \{f \in C^0([0,1],\mathbb{R}) \,|\, f(1) = 0\}$ (versehen mit der Supremumsnorm) und $U = \{f \in X \,|\, \int_0^1 f\,dx = 0\}$.

   (a) Vergewissern Sie sich, dass X ein Banachraumun U ein abgeschlossener Unterraum von X ist.

   (b) Zeigen Sie: es existiert kein Element $g \in X$ mit $\|g\| = 1$ und $dist(g,U) := \inf\{\|g - f\| \,|\, f \in U\} = 1$. Was wäre, wenn X ein Hilbertraum wäre?

   Hinweis zu (b): Nehmen Sie an, $g \in X$ hätte die geforderten Eigenschaften; betrachten Sie dann für $f_n(x) = 1 - x^n$ die Funktionen $h_n = g - \lambda_n f_n$, wobei $\lambda_n \in \mathbb{R}$ so gewählt ist, dass $h_n \in U$. Leiten Sie daraus einen Widerspruch ab.

2. (a) Zeigen Sie den Satz von Liouville: Eine auf ganz $\mathbb{R}^n$ definierte, beschränkte harmonische Funktion ist konstant.

   (b) Zeigen Sie, dass für $n = 2$ die obige Aussage bereits für subharmonische Funktionen gilt.

   (c) Finden Sie für $n > 2$ beschränkte, subharmonische Funktionen auf $\mathbb{R}^n$, die nicht konstant sind.