Aufgaben zur Vorlesung
Geometrische Analysis

Blatt 4 J. Lohkamp
WS 2005/06 Abgabe: Mittwoch, 23.11.2005 in den Übungen

---

1. Beweisen Sie den Mittelwertsatz für harmonische Funktionen: Ist $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ beschränkt und $f \in C^2(\Omega) \cap C^0(\bar{\Omega})$ mit $\Delta f = 0$ auf ganz Ω, so gilt:

$$f(x) = \frac{1}{n\omega_n R^{n-1}} \int_{\partial B_R(x)} f \, dA = \frac{1}{\omega_n R^{n-1}} \int_{B_R(x)} f \, dy.$$

2. Zeigen Sie: Ist $g : \Omega \to \mathbb{R}$ und $f_n : \Omega \to \mathbb{R}$ eine Folge von C^2–Funktionen mit $\Delta f = g$ und $\|f_n\|_{L^2(\Omega)} = 1$, so besitzt f_n eine in C^k konvergente Teilfolge (für beliebiges k).

3. Bereiten Sie für die Übungsgruppe einen Beweis des Maximumprinzips für (sub-/super-)harmonische Funktionen vor (siehe etwa Gilbarg, Trudinger, Elliptic Partial Differential Equations of Second Order): Ist $\Delta f \geq 0 \, (\leq 0)$ in Ω und $y \in \Omega$ ein Punkt für den $f(y) = \sup_\Omega f \; (\inf_\Omega f)$ gilt, so ist f konstant.