Aufgaben zur Vorlesung
Geometrische Analysis

Blatt 3 — J. Lohkamp
WS 2005/06 — Abgabe: Donnerstag, 17.11.2005 in den Übungen

---

1. Sei $f : M \to \mathbb{R}$ differenzierbar. Zeigen Sie, dass in lokalen Koordinaten
$$\nabla f = \sum g^{ij} \frac{\partial f}{\partial x_i} \frac{\partial}{\partial x_j}$$
gilt (wobei $(g^{ij}) = (g_{ij})^{-1}$).

2. Sei η eine Volumenform auf M (also $\eta_p(e_1, \ldots, e_n) = 1$ falls $e_1, \ldots, e_n$ eine orientierte Orthonormalbasis von T_pM ist). Zeigen Sie, dass in lokalen Koordinaten
$$\eta(\frac{\partial}{\partial x_1}, \ldots, \frac{\partial}{\partial x_n}) = \sqrt{\det(g_{ij})}.$$
Stellen Sie dazu zunächst die $\frac{\partial}{\partial x_i}$ bezüglich einer orientierten Orthonormalbasis von T_pM dar.

3. Wir wollen die Divergenz eines Vektorfeldes X mit Hilfe der Gleichung
$$\int_M (divX) \cdot f \, dvol_g = -\int_M \langle X, \nabla f \rangle \, dvol_g$$
für alle differenzierbaren Funktionen f definieren. Zeigen Sie aus dieser Gleichung, dass dann in lokalen Koordinaten für $X = \sum X_i \frac{\partial}{\partial x_i}$,
$$divX = \frac{1}{\sqrt{\det(g_{ij})}} \frac{\partial}{\partial x_i} \left(X_i \sqrt{\det(g_{ij})} \right)$$
gilt. Zeigen Sie weiter, dass dieser Ausdruck unabhängig von der Wahl der Koordinaten ist, d.h. ist $X = \sum X_i \frac{\partial}{\partial x_i} = \sum Y_i \frac{\partial}{\partial y_i}$, so gilt
$$\frac{1}{\sqrt{\det(g_{ij})}} \frac{\partial}{\partial x_i} \left(X_i \sqrt{\det(g_{ij})} \right) = \frac{1}{\sqrt{\det(g_{ij})}} \frac{\partial}{\partial y_i} \left(Y_i \sqrt{\det(g_{ij})} \right).$$