1. (Vektorfelder, Lieklammer) Für ein Vektorfeld X auf einer differenzierbaren Mannigfaltigkeit M und eine C^2-Funktion $f : M \to \mathbb{R}$ defninieren wir

$$Xf : M \to \mathbb{R}, \qquad Xf(p) := df_p(X_p) = \frac{d}{dt}|_{t=0}(f \circ c),$$

wobei $c : (-\varepsilon, \varepsilon) \to M$ eine Kurve mit $c(0) = p, \dot{c}(0) = X_p$ ist. Ist X nur auf einer (offenen) Teilmenge $U \subset M$ definiert so können wir natürlich $Xf : U \to \mathbb{R}$ definieren.

   (a) Zeigen Sie: Für die durch die Karte x induzierten Vektorfelder $\frac{\partial}{\partial x_i} : U \to TM$ gilt

$$\frac{\partial}{\partial x_i} f\,(p) = \frac{\partial}{\partial x_i}(f \circ x^{-1})(x(p)),$$

   ($\frac{\partial}{\partial x_i}$ auf der rechten Seite bedeutet natürlich partielles Ableiten im $\mathbb{R}^n$) sowie weiter für $X = \sum \xi_i \frac{\partial}{\partial x_i}$

$$Xf = \sum \xi_i \frac{\partial}{\partial x_i} f.$$

   (b) Zeigen Sie:

$$\frac{\partial}{\partial x_i}\left(\frac{\partial}{\partial x_j} f\right) = \frac{\partial}{\partial x_j}\left(\frac{\partial}{\partial x_i} f\right) \qquad \text{in } U.$$

   (c) Zeigen Sie für in U definierte Vektorfelder $X = \sum \xi_i \frac{\partial}{\partial x_i}$ und $Y = \sum \eta_i \frac{\partial}{\partial x_i}$

$$X(Yf) = \sum_{i,j} \xi_i \frac{\partial \eta_j}{\partial x_i} \frac{\partial}{\partial x_j} f + \sum_{i,j} \xi_i \eta_j \frac{\partial}{\partial x_i} \frac{\partial}{\partial x_j} f$$

   und damit

$$[X, Y]f := X(Yf) - Y(Xf) = \sum_{i,j} \left(\xi_i \frac{\partial \eta_j}{\partial x_i} - \eta_i \frac{\partial \xi_j}{\partial x_i} \right) \frac{\partial}{\partial x_j} f.$$

2. Sei $M \subset \mathbb{R}^n$ eine Untermannigfaltigkeit. Zeigen Sie, dass durch

$$(\nabla_X Y)_p := \left(\frac{d}{dt}|_{t=0} Y \circ c \right)^T,$$

   für Vektorfelder X, Y, wobei $c : (-\varepsilon, \varepsilon) \to M$ eine Kurve mit $c(0) = p$, $\dot{c}(0) = X_p$ ist, eine kovariante Ableitung auf M definiert wird, die auch

$$X\langle Y, Z\rangle = \langle \nabla_X Y, Z\rangle + \langle Y, \nabla_X Z\rangle$$

   und

$$\nabla_X Y - \nabla_Y X = [X, Y]$$

   für alle X, Y erfüllt. (Der Einfachheit halber empfiehlt es sich, die letzte Gleichung zunächst für $X = \frac{\partial}{\partial x_i}$ und $Y = \frac{\partial}{\partial x_j}$ zu überprüfen.)

3. Lesen Sie den Beweis von 2.91 (S. 89 in der 3. Ausgabe) in *S. Gallot, D. Hulin, J. Lafontaine, Riemannian Geometry* (die Tatsache, dass auf einer Riemannschen Mannigfalitgkeit durch $d(x, y) := \inf\{L(c) \,|\, c \text{ Kurve von } x \text{ nach } y\}$ eine Metrik definiert wird, die mit der gegebenen Topologie der Mannigfaltigkeit verträglich ist).