Lösungsvorschläge zu den Aufgaben zur Vorlesung

Analysis III (Teil 2: Differentialformen)

Blatt 8 — J. Lohkamp/M. Förster

WS 2004/05 — Abgabe: Montag, 13.12.2004, 8:15 Uhr

Aufgabe 29: *Beweise oder widerlege: Durch*

$$M := \{(\sin(2t), \cos(t)) \mid 0 \leq t \leq 2\pi\}$$

ist eine Untermannigfaltigkeit von $\mathbb{R}^2$ definiert. Zeichne eine Skizze von M.

LÖSUNG: Wir erinnern uns an folgende

Definition (Vorlesung) *Eine Teilmenge $M \subset \mathbb{R}^n$ heißt m-*dimensionale Untermannigfaltigkeit*, wenn es zu jedem $x \in M$ eine Umgebung $U \subset \mathbb{R}^n$ gibt zusammen mit einem Diffeomorphismus $U \to U' \subset \mathbb{R}^n$, welcher folgende Eigenschaften erfüllt:*

$$\varphi(x) = 0 \qquad \textit{und} \qquad \varphi(N \cap U) = (\mathbb{R}^m \times \{0\}) \cap U'$$

Speziell für Aufgabe 1 betrachte man $(0,0) \in M \subset \mathbb{R}^2$ und nehme an, es gebe eine Umgebung U von $(0,0)$ und einen Diffeomorphismus φ mit den genannten Eigenschaften. Es können nur die Fälle $m = 0, 1, 2$ auftreten.

1. Nach der Maßtransformationsformel bilden Diffeomorphismen Nullmengen auf Nullmengen ab, so dass die Fälle $m = 0$ und $m = 2$ ausscheiden.

2. Es bleibt der Fall $m = 1$, wir nehmen wieder an, dass M eine Mannigfaltigkeit ist. Dann gibt es eine Umgebung $U \subset \mathbb{R}^2$ von $(0,0) \in M$ und einen Diffeomorphismus $\varphi : U \to U' \subset \mathbb{R}^2$ mit $\varphi((0,0)) = (0,0)$ und $\varphi(M \cap U) = (\mathbb{R} \times \{0\}) \cap U'$. Betrachte

   $$\phi : U \xrightarrow{\varphi} U' \xrightarrow{\mathrm{pr}_2} \mathbb{R}\,,$$

   wobei $\mathrm{pr}_2 : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, (x,y) \mapsto y$ die Projektion auf den zweiten Faktor ist. Dann ist ϕ eine Abbildung vom Rang 1 (denn φ hat als Diffeomorphismus vollen Rang, und die Projektion ist vom Rang 1). Wegen $\varphi(M \cap U) \subset \mathbb{R} \times \{0\}$ ist $\phi|_{M \cap U} \equiv 0$.
   Seien nun (s_n) und (t_n) Folgen mit $s_n \to \frac{\pi}{2}$ und $t_n \to \frac{3\pi}{2}$ für $n \to \infty$. Wegen der Stetigkeit von sin und cos gilt dann $\gamma(s_n), \gamma(t_n) \in U \cap M$ für alle $m \geq m_0$, und ϕ eingeschränkt auf einen Umgebung von $\frac{\pi}{2}$ und $\frac{3\pi}{2}$ ist differenzierbar mit

   $$(\phi \circ \gamma)'(\tfrac{\pi}{2}) = \lim_{n\to\infty} \frac{\phi(\gamma(t_n)) - \phi(\gamma(\frac{\pi}{2}))}{t_n - \frac{\pi}{2}} = 0 = \lim_{n\to\infty} \frac{\phi(\gamma(s_n)) - \phi(\gamma(\frac{3\pi}{2}))}{s_n - \frac{3\pi}{2}} = (\phi \circ \gamma)'(\tfrac{3\pi}{2}).$$

   Mit dieser Gleichung folgt der gewünschte Widerspruch, denn die Kettenregel liefert

   $$\phi'((0,0)) \cdot (-2,-1) = \phi'(\gamma(\tfrac{\pi}{2})) \cdot \gamma'(\tfrac{\pi}{2}) \overset{\mathrm{KR}}{=} (\phi \circ \gamma)'(\tfrac{\pi}{2}),$$
   $$\phi'((0,0)) \cdot (-2,1) = \phi'(\gamma(\tfrac{3\pi}{2})) \cdot \gamma'(\tfrac{3\pi}{2}) \overset{\mathrm{KR}}{=} (\phi \circ \gamma)'(\tfrac{3\pi}{2}).$$

   (Denn $D_{(0,0)}\phi$ hat den Rang 1, und damit würde $(-2,-1) = (-2,1)$ folgen.) ■

Aufgabe 31: *Sei $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ eine* glatte*, d.h. unendlich oft differenzierbare Abbildung. Zeige, dass*

$$Graph(f) := \{(x, f(x)) \mid x \in \mathbb{R}^n\}$$

eine Untermannigfaltigkeit von $\mathbb{R}^{n+m}$ ist.

LÖSUNG: Definiere

$$g : \mathbb{R}^{n+m} \to \mathbb{R}^{(n+m)-n} = \mathbb{R}^m, \quad (x, y) \mapsto f(x) - y.$$

Da f glatt ist, gilt dasselbe für g und es ergibt sich

$$D_{(x,y)}g = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1(x)}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial f_1(x)}{\partial x_n} & -1 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f_m(x)}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial f_m(x)}{\partial x_n} & 0 & \dots & -1 \end{pmatrix} \qquad \Rightarrow \qquad \mathrm{Rang}(T_{(x,y)}f) = m$$

sowie

$$g^{-1}(\{0\}) = \{(x, y) \in \mathbb{R}^{n+m} \mid f(x) = y\} = \mathrm{Graph}(f),$$

d.h. Graph(f) ist als Nullstellenmenge der glatten Funktion g eine (n-dimensionale) Untermannigfaltigkeit. Es bleibt zu klären, ob Graph(f) eine globale Karte besitzt. Dazu betrachte

$$p : \mathrm{Graph}(f) \to \mathbb{R}^n, \quad (x, f(x)) \mapsto x.$$

- p ist injektiv, denn

$$p((x, f(x))) = p(\tilde{x}, f(\tilde{x})) \Leftrightarrow x = \tilde{x} \Rightarrow f(x) = f(\tilde{x}) \Rightarrow (x, f(x)) = (\tilde{x}, f(\tilde{x}))$$

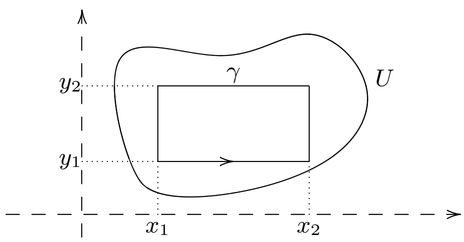
- p ist surjektiv, denn für $x \in \mathbb{R}^n$ wird $(x, f(x)) \in \mathrm{Graph}(f)$ unter p auf x abgebildet.

Da p als Projektion glatt ist mit glatter Umkehrabbildung $x \mapsto (x, f(x))$ (beachte: f ist glatt!), ist p ein Diffeomorphismus und damit eine globale Karte für Graph(f). ■

Blatt 9 — J. Lohkamp/M. Förster
WS 2004/05 — Abgabe: Montag, 20.12.2004, 8:15 Uhr

Aufgabe 33 *Sei $\omega = p(x, y)dx + q(x, y)dy$ eine in der offenen Menge $U \subset \mathbb{R}^2$ stetige 1-Form. Sei γ der (positiv, d.h. gegen den Uhrzeigersinn durchlaufene) Rand eines achsenparallelen in U enthaltenen Rechtecks. Gebe explizite Formeln für $\int_\gamma \omega$ an.*

LÖSUNG:



Sei $\gamma : [0,1] \to U$ mit $\gamma(0) = (x_1, y_1)$, $\gamma(\frac{1}{4}) = (x_2, y_1)$, $\gamma(\frac{1}{2}) = (x_2, y_2)$ und $\gamma(\frac{3}{4}) = (x_1, y_2)$ die Randkurve. Dann ist γ insbesondere stückweise glatt und es gilt

$$\gamma(t) = \begin{cases} (x_1 + 4t \cdot (x_2 - x_1), y_1) & \text{falls } 0 \le t \le \frac{1}{4} \\ (x_2, y_1 + (4t-1) \cdot (y_2 - y_1)) & \text{falls } \frac{1}{4} \le t \le \frac{1}{2} \\ (x_2 + (4t-2) \cdot (x_1 - x_2), y_2) & \text{falls } \frac{1}{2} \le t \le \frac{3}{4} \\ (x_1, y_2 + (4t-3) \cdot (y_1 - y_2)) & \text{falls } \frac{3}{4} \le t \le 1 \end{cases}$$

Seien $\gamma_k : [0,1] \to U, t \mapsto \gamma(\frac{k-1+t}{4})$ für $k = 1,2,3,4$ die vertikalen bzw. horizontalen Randstücke. Dann gilt

$$\begin{aligned} & \gamma_1'(t) = (x_2 - x_1, 0) \quad \text{und} \quad \gamma_3'(t) = (x_1 - x_2, 0) \\ \text{sowie} \quad & \gamma_2'(t) = (0, y_2 - y_1) \quad \text{und} \quad \gamma_4'(t) = (0, y_1 - y_2), \end{aligned}$$

weiterhin gilt

$$\gamma_1(t) = \gamma_3(-t) + (0, y_2 - y_1) \quad \text{und} \quad \gamma_2(t) = \gamma_4(-t) + (x_2 - x_1, 0)$$

für alle $t \in [0,1]$. Sind $\pi_j : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ die Projektionen auf den j-ten Faktor, $j = 1,2$, so folgt

$$\begin{aligned} \int_\gamma \omega &\overset{\text{Additivität}}{=} \int_{\gamma_1} \omega + \int_{\gamma_2} \omega + \int_{\gamma_3} \omega + \int_{\gamma_4} \omega \\ &\overset{\text{Voraussetzung}}{=} \sum_{k=1}^{4} \int_0^1 \big(p(\gamma_k(t)) \cdot \pi_1(\gamma_k'(t)) + q(\gamma_k(t)) \cdot \pi_2(\gamma_k'(t))\big)\, dt \\ &= \int_0^1 \begin{pmatrix} p(\gamma_1(t)) \cdot (x_2 - x_1) + q(\gamma_2(t)) \cdot (y_2 - y_1) \\ +p(\gamma_3(t)) \cdot (x_1 - x_2) + q(\gamma_4) \cdot (y_1 - y_2) \end{pmatrix} dt \\ &= (x_2 - x_1) \cdot \int_0^1 (\, p(\gamma_1(t)) - p(\gamma_3(t))\,)\, dt \\ &\quad + (y_2 - y_1) \cdot \int_0^1 (\, q(\gamma_2(t)) - q(\gamma_4(t))\,)\, dt \end{aligned}$$

Man kann jetzt noch die Relationen zwischen γ_k und γ_{k+2} für $k = 1,2$ einbauen, das führt hier jedoch nicht zu einer wesentlichen Vereinfachung des Ausdrucks. ■

Aufgabe 34: *Sei*

$$S^n := \{x \in \mathbb{R}^{n+1} \mid \|x\| = 1\}$$

die n-dimensionale (Einheits-)Sphäre.
Betrachte die offene Menge $U := \{x \in \mathbb{R}^{n+1} \,|\, x_{n+1} \neq 0\} \subset \mathbb{R}^{n+1}$ und zeige, dass es eine stetig partiell differenzierbare Abbildung $\varphi : U \to \mathbb{R}^n$ gibt, so dass die Einschränkung von φ auf $S^n \cap U = S^n \backslash \{(0, \ldots, 0, 1)\}$ eine bijektive Abbildung

$$\varphi|_{S^n \cap U} : S^n \cap U \to \mathbb{R}^n$$

induziert. Verdeutliche die Abbildung φ für den Fall $n = 1$ durch eine Skizze.

Lösung: Definiere

$$\varphi : U \to \mathbb{R}^n, \quad (x_1, \ldots, x_{n+1}) \mapsto \left(\frac{x_1}{1 - x_{n+1}}, \ldots, \frac{x_n}{1 - x_{n+1}}\right).$$

Dann ist φ als Komposition stetig partiell differenzierbar. Betrachtet man (mit *Nordpol* $N := (0, \ldots, 0, 1)$) die Einschränkung $\varphi|_{U \cap S^n} : S^n \backslash \{N\} \to \mathbb{R}^n$ und setzt

$$\psi : \mathbb{R}^n \to S^n \backslash \{N\}, \quad \underbrace{(y_1, \ldots, y_n)}_{=:y} \mapsto \left(\frac{2y_1}{\|y\|^2 + 1}, \ldots, \frac{2y_n}{\|y\|^2 + 1}, \frac{\|y\|^2 - 1}{\|y\|^2 + 1} \right)$$

(denn

- $\|\psi(y)\|^2 = \frac{4\|y\|^2 + \|y\|^4 - 2\|y\|^2 + 1}{(\|y\|^2+1)^2} = \frac{\|y\|^4 + 2\|y\|^2 + 1}{(\|y\|^2+1)^2} = 1 \quad \Rightarrow \quad \psi(y) \in S^n$,
- $\frac{\|y\|^2 - 1}{\|y\|^2 + 1} \neq 1 \quad \Rightarrow \quad \psi(y) \in U$

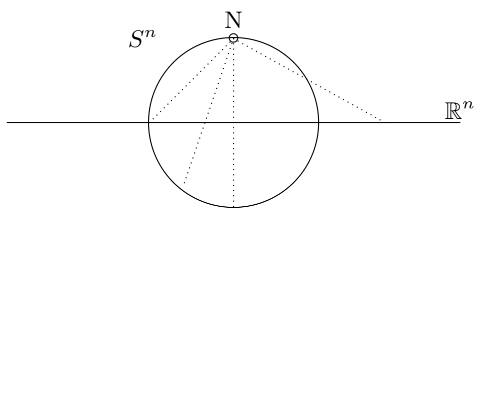
für alle $y \in \mathbb{R}^n$), so folgt

$$\begin{aligned}
&(\psi \circ \varphi) \underbrace{(x_1, \ldots, x_{n+1})}_{=:x} \\
= \quad & \psi \underbrace{\left(\frac{x_1}{1 - x_{n+1}}, \ldots, \frac{x_n}{1 - x_{n+1}} \right)}_{=:y \Rightarrow \|y\| \overset{1-x_{n+1}>0}{=} \frac{\|(x_1, \ldots, x_n)\|}{1 - x_{n+1}}} \\
= \quad & \left(\frac{2 \frac{x_1}{1 - x_{n+1}}}{\|y\|^2 + 1}, \ldots, \frac{2 \frac{x_n}{1 - x_{n+1}}}{\|y\|^2 + 1}, \frac{\|y\|^2 - 1}{\|y\|^2 + 1} \right) \\
= \quad & \left(\frac{2 \frac{x_1}{1 - x_{n+1}}}{\frac{\|x\|^2 + 1 - 2x_{n+1}}{(1 - x_{n+1})^2}}, \ldots, \frac{2 \frac{x_n}{1 - x_{n+1}}}{\frac{\|x\|^2 + 1 - 2x_{n+1}}{(1 - x_{n+1})^2}}, \frac{\frac{\|x\|^2 - 1 + 2x_{n+1} - 2x_{n+1}^2}{(1 - x_{n+1})^2}}{\frac{\|x\|^2 + 1 - 2x_{n+1}}{(1 - x_{n+1})^2}} \right) \\
\overset{\|x\|=1}{=} \quad & \left(\frac{2x_1}{\frac{2 \cdot (1 - x_{n+1})}{1 - x_{n+1}}}, \ldots, \frac{2x_n}{\frac{2 \cdot (1 - x_{n+1})}{1 - x_{n+1}}}, \frac{2x_{n+1}(1 - x_{n+1})}{2(1 - x_n)} \right) \quad = \quad (x_1, \ldots, x_{n+1})
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&(\varphi \circ \psi) \underbrace{(y_1, \ldots, y_n)}_{=:y} \\
= \quad & \varphi \left(\frac{2y_1}{\|y\|^2 + 1}, \ldots, \frac{2y_n}{\|y\|^2 + 1}, \frac{\|y\|^2 - 1}{\|y\|^2 + 1} \right) \\
= \quad & \left(\frac{\frac{2y_1}{\|y\|^2+1}}{1 - \frac{\|y\|^2 - 1}{\|y\|^2 + 1}}, \ldots, \frac{\frac{2y_n}{\|y\|^2+1}}{1 - \frac{\|y\|^2 - 1}{\|y\|^2 + 1}} \right) \quad = \quad \left(\frac{\frac{2y_1}{\|y\|^2+1}}{\frac{2}{\|y\|^2+1}}, \ldots, \frac{\frac{2y_n}{\|y\|^2+1}}{\frac{2}{\|y\|^2+1}} \right) \quad = \quad (y_1, \ldots, y_n),
\end{aligned}$$

d.h. φ und ψ sind invers zueinander. ■

<u>Skizze:</u>



Die Abbildung φ bildet $x \in S^n \backslash \{N\}$ auf den Schnittpunkt der reellen Achse mit der Halbgeraden durch x ab, welche in N beginnt.

Aufgabe 35: Sei $U \subset \mathbb{R}^n$ offen, $\gamma : [a,b] \to \mathbb{R}^n$ ein glatter Weg in U und $\mathbf{v} : U \to \mathbb{R}^n$ eine stetiges Vektorfeld auf U. Beweise

$$\left| \int_\gamma \langle \mathbf{v}, d\mathbf{x} \rangle \right| \quad \leq \quad \mathrm{L}(\gamma) \cdot \sup_{x \,\in\, \mathrm{Bild}(\gamma)} \{ \, |\, \mathbf{v}(x) \,| \, \} \,,$$

wobei $\mathrm{L}(\gamma)$ die (euklidische) Länge des Weges γ bezeichnet.[1]

LÖSUNG: Es gilt

$$\begin{aligned}
\left| \int_\gamma \langle \mathbf{v}, d\mathbf{x} \rangle \right| \quad & \overset{\text{Definition}}{=} \quad \left| \int_a^b \big\langle \mathbf{v}(\gamma(t)), \gamma'(t) \big\rangle \; dt \right| \\
& \overset{\int\text{-Monotonie}}{\leq} \quad \int_a^b \left| \big\langle \mathbf{v}(\gamma(t)), \gamma'(t) \big\rangle \right| \; dt \\
& \overset{\text{Cauchy-Schwarz}}{\leq} \quad \int_a^b \|\mathbf{v}(\gamma(t))\| \cdot \|\gamma'(t)\| \, dt \\
& \leq \quad \int_a^b \sup_{t\in[a,b]} \{ \, |\mathbf{v}(\gamma(t))| \, \} \cdot \|\gamma'(t)\| \, dt \\
& \overset{\int\text{-Linearität}}{=} \quad \sup_{x \,\in\, \mathrm{Bild}(\gamma)} \{\mathbf{v}(x)\} \cdot \int_a^b \|\gamma'(t)\| \, dt \\
& \overset{\text{Analyis II}}{=} \quad \sup_{x \,\in\, \mathrm{Bild}(\gamma)} \{\mathbf{v}(x)\} \cdot \mathrm{L}(\gamma). \quad \blacksquare
\end{aligned}$$

Aufgabe 36: *Sei $f : U \to \mathbb{R}$ eine stetig differenzierbare Funktion und $\gamma : [0,1] \to U$ ein zweimal stetig differenzierbarer Weg, welcher für das Vektorfeld $\mathbf{v} := -grad(f)$ die Bedingung*

$$\gamma''(t) = \mathbf{v}(\gamma(t))$$

für alle $t \in [0,1]$ erfüllt. Beweise für $0 \leq t_1 \leq t_2 \leq 1$

$$\frac{1}{2} \left(\big\langle \gamma'(t_2), \gamma'(t_2) \big\rangle - \big\langle \gamma'(t_1), \gamma'(t_1) \big\rangle \right) = f(\gamma(t_2)) - f(\gamma(t_1)).$$

BEWEIS: Es ist $\gamma(t) = (\gamma_1(t), \ldots, \gamma_n(t))$ für $1 \leq i \leq n$ gilt

$$\int_{t_1}^{t_2} \gamma_i''(t)\gamma_i'(t) \, dt \overset{\substack{\text{Partielle} \\ \text{Integration}}}{=} \big[(\gamma_i'(t))^2 \big]_{t_1}^{t_2} - \int_{t_1}^{t_2} \gamma_i'(t) \cdot \gamma_i''(t) \, dt,$$

also

$$\int_{t_1}^{t_2} \gamma_i'(t) \cdot \gamma_i''(t) \, dt \quad = \quad \frac{1}{2} \cdot \big[\gamma_i'(t)^2 \big]_{t_1}^{t_2} \tag{1}$$

[1] **Erinnerung/Hinweis:**

$$\int_\gamma \langle \mathbf{v}, d\mathbf{x} \rangle := \int_a^b \big\langle \mathbf{v}(\gamma(t)), \gamma'(t) \big\rangle \; dt$$

Nun folgt

$$
\begin{aligned}
(f\circ\gamma)(t_1)-(f\circ\gamma)(t_2) &\overset{\substack{\text{Hauptsatz der}\\ \text{Differential-}\\ \text{und Integral-}\\ \text{rechnung}}}{=} \int_{t_2}^{t_1} (f\circ\gamma)'(t)\,dt \\
&\overset{\text{Kettenregel}}{=} \int_{t_2}^{t_1} \big\langle \operatorname{grad}(f)(\gamma(t)),\gamma'(t)\big\rangle\, dt \\
&= \int_{t_2}^{t_1} \big\langle -\mathbf{v}(\gamma(t)),\gamma'(t)\big\rangle\, dt \\
&\overset{\text{Voraussetzung}}{=} \int_{t_1}^{t_2} \big\langle \gamma''(t),\gamma'(t)\big\rangle\, dt \\
&= \int_{t_1}^{t_2} \left(\sum_{i=1}^{n} \gamma_i''(t)\cdot\gamma_i'(t)\right) dt \\
&\overset{\substack{\text{Linearität}\\ \text{des Integrals}}}{=} \sum_{i=1}^{n}\int_{t_1}^{t_2} \gamma_i''(t)\cdot\gamma_i'(t)\,dt \\
&\overset{(1)}{=} \sum_{i=1}^{n}\frac{1}{2}\left[\gamma'(t)^2\right] \quad = \quad \frac{1}{2}\left[\big\langle\gamma'(t),\gamma'(t)\big\rangle\right]_{t_1}^{t_2}. \ \blacksquare
\end{aligned}
$$

Blatt 10 | J. Lohkamp/M. Förster
WS 2004/05 | Abgabe: Montag, 17.01.2005, 8:15 Uhr

Aufgabe 37

1. *Sei für $i = 1,\ldots,k$ eine p_i-Differentialform ω_i in einer offenen Menge $U \subset \mathbb{R}^n$ mit $n > \sum_{i=1}^{k} p_i$ gegeben. Berechne eine Produktformel für die äußere Ableitung*

$$d(\omega_1 \wedge \omega_2 \wedge \ldots \wedge \omega_k).$$

2. *Sei $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ stetig differenzierbar, und f, g seien stetig differenzierbare 0-Formen in $U \subset \mathbb{R}^n$ mit $g = \varphi \circ f$. Zeige $df \wedge dg = 0$.*

Lösung:

1.

$$d(\omega_1 \wedge \omega_2 \wedge \ldots \wedge \omega_k) = \sum_{j=1}^{k} (-1)^{\left(\sum_{i=1}^{j-1} p_i\right)} \cdot \omega_1 \wedge \ldots \wedge d\omega_j \wedge \ldots \wedge \omega_k.$$

Die Gleichung wird induktiv bewiesen. Für $k = 1$ ist die Behauptung richtig. Sei also die Behauptung für $k-1$ bereits bewiesen, dann folgt

$$
\begin{aligned}
&d(\omega_1 \wedge \ldots \wedge \omega_k) \\
&\overset{\wedge \text{ assoziativ}}{=} \quad d((\omega_1 \wedge \ldots \wedge \omega_{k-1}) \wedge \omega_k) \\
&\overset{\text{Vorlesung}}{=} \quad d(\omega_1 \wedge \ldots \wedge \omega_{k-1}) \wedge \omega_k + (-1)^{\left(\sum_{i=1}^{k-1} p_i\right)} \cdot \omega_1 \wedge \ldots \wedge \omega_{k-1} \wedge d\omega_k \\
&\overset{\substack{\text{Induktions-}\\ \text{voraussetzung}}}{=} \quad \left(\sum_{j=1}^{k-1} (-1)^{\left(\sum_{i=1}^{j-1} p_i\right)} \cdot \omega_1 \wedge \ldots \wedge d\omega_j \wedge \ldots \wedge \omega_{k-1}\right) \wedge \omega_k \\
&\qquad\qquad + (-1)^{\left(\sum_{i=1}^{k-1} p_i\right)} \cdot \omega_1 \wedge \ldots \wedge \omega_{k-1} \wedge d\omega_k \\
&\overset{\wedge \text{ additiv}}{=} \quad \sum_{j=1}^{k} (-1)^{\left(\sum_{i=1}^{j-1} p_i\right)} \cdot \omega_1 \wedge \ldots \wedge d\omega_j \wedge \ldots \wedge \omega_k.
\end{aligned}
$$

2.

$$
\begin{aligned}
df \wedge dg &\overset{\text{Voraussetzung}}{=} df \wedge d(\varphi \circ f) \\
&\overset{\substack{\text{Definition,}\\ \text{Kettenregel}}}{=} \left(\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_i} dx_i\right) \wedge \left(\sum_{k=1}^{n} \varphi'(f(x)) \cdot \frac{\partial f}{\partial x_k} dx_k\right) \\
&\overset{\wedge \text{ additiv}}{=} \underbrace{\sum_{i=1}^{n} \varphi'(f(x)) \left(\frac{\partial f}{\partial x_i}\right)^2 dx_i \wedge dx_i}_{\overset{dx_i \wedge dx_i = 0}{=} 0} \\
&\qquad + \underbrace{\sum_{i<k} \varphi'(f(x)) \cdot \frac{\partial f}{\partial x_i} \frac{\partial f}{\partial x_k} dx_i \wedge dx_k + \sum_{i>k} \varphi'(f(x)) \cdot \frac{\partial f}{\partial x_i} \frac{\partial f}{\partial x_k} dx_i \wedge dx_k}_{\overset{dx_i \wedge dx_k = -dx_k \wedge dx_i}{=} 0}
\end{aligned}
$$

Aufgabe 38: *Betrachte die in* $U := \mathbb{R}^2 \backslash \{(0,0)\} \subset \mathbb{R}^2$ *erklärte* 1*-Form*

$$
\omega := -\frac{y}{x^2+y^2} dx + \frac{x}{x^2+y^2} dy
$$

und zeige, dass ω *geschlossen, aber nicht exakt ist.*

Lösung: Wegen

$$
d\omega \overset{\substack{\text{Definition,}\\ dx \wedge dx = 0}}{=} \underbrace{-\frac{x^2-y^2}{(x^2+y^2)^2}}_{=\frac{\partial\left(-\frac{y}{x^2+y^2}\right)}{\partial y}} dy \wedge dx \underbrace{-\frac{x^2-y^2}{(x^2+y^2)^2}}_{=\frac{\partial\left(\frac{x}{x^2+y^2}\right)}{\partial x}} dx \wedge dy \overset{dx \wedge dy = -dy \wedge dx}{=} 0
$$

ist ω geschlossen. Nach Vorlesung ist ω genau dann exakt, wenn das Kurvenintegral über ω längs jeder geschlossenen Kurve γ veschwindet. Sei $\gamma : [0, 2\pi] \to U, t \mapsto (\cos t, \sin t)$. Dann gilt $\gamma'(t) = (-\sin t, \cos t)$ und weiter

$$
\int_\gamma \omega = \int_0^{2\pi} \frac{-\sin t}{\cos^2 t + \sin^2 t} \cdot (-\sin t) + \frac{\cos t}{\cos^2 t + \sin^2 t} \cdot (\cos t)\, dt = \int_0^{2\pi} dt = 2\pi.
$$

Aufgabe 39: *Betrachte natürliche Zahlen $i_1, \ldots, i_p$ mit $i_1 < \ldots < i_p$. Es gibt eine eindeutige Permutation $\sigma = (i_1, \ldots, i_p, j_1, \ldots, j_{n-p})$ von $(1, \ldots, n)$ mit $j_1 < \ldots < j_p$. Durch*

$$*(f \cdot dx_{i_1} \wedge \ldots \wedge, dx_{i_p}) := sgn(\sigma) \cdot f \cdot dx_{j_1} \wedge \ldots \wedge dx_{j_{n-p}}$$

für einfache p-Formen und $*(\omega_1 + \omega_2) := *(\omega_1) + *(\omega_2)$ für Summen einfacher p-Formen ist der Hodge-$*$-Operator *definiert, welcher einer beliebigen p-Form ω im (orientierten, euklidischen Vektorraum) $\mathbb{R}^n$ eine eindeutige $(n-p)$-Form $*\omega$ in $\mathbb{R}^n$ zuordnet. Zeige*

1. *Für jede p-Form ω $(1 \leq p \leq n)$ gilt $**\omega = (-1)^{p(n-p)} \cdot \omega$.*
2. *Durch*
$$\langle \omega_1, \omega_2 \rangle \cdot dx_1 \wedge \ldots \wedge dx_n = \omega_1 \wedge *\omega_2$$
ist ein Skalarprodukt $\langle \omega_1, \omega_2 \rangle$ auf dem Vektorraum aller p-Formen definiert.

LÖSUNG:

1.

$$\begin{aligned}
**\omega &= *\left(\sum_{i_1<\ldots<i_p} a_{i_1\ldots i_p} \cdot \operatorname{sgn}\begin{pmatrix} 1 & \ldots & p & p+1 & \ldots & n \\ i_1 & \ldots & i_p & j_1 & \ldots & j_{n-p} \end{pmatrix} \cdot dx_{j_1} \wedge \ldots \wedge dx_{j_{n-p}}\right) \\
&= \sum_{i_1<\ldots<i_p} a_{i_1\ldots i_p} \cdot \operatorname{sgn}\begin{pmatrix} 1 & \ldots & p & p+1 & \ldots & n \\ i_1 & \ldots & i_p & j_1 & \ldots & j_{n-p} \end{pmatrix} \\
&\qquad \cdot \operatorname{sgn}\begin{pmatrix} 1 & \ldots & n-p & n-p+1 & \ldots & n \\ j_1 & \ldots & j_{n-p} & i_1 & \ldots & i_p \end{pmatrix} \cdot dx_{i_1} \wedge \ldots \wedge dx_{i_p} \\
&= (-1)^{p(n-p)} \sum_{i_1<\ldots<i_p} a_{i_1\ldots i_p} dx_{i_1} \wedge \ldots \wedge dx_{i_p} \quad = \quad (-1)^{p(n-p)}\omega.
\end{aligned}$$

2. Wegen $*(f\omega) = f*\omega$ und der Additivität von $*$ genügt es, Bilinearität und Symmetrie für $\omega = dx_{i_1} \wedge \ldots \wedge dx_{i_p}$ nachzuweisen.
   (a) Die Bilinearität folgt sofort aus der Linearität von $\wedge$ und $*$.
   (b) Die Symmetrie folgt aus

$$\underbrace{\left(dx_{i_1} \wedge \ldots \wedge dx_{i_p}\right)}_{=:\omega_1} \wedge * \underbrace{\left(dx_{\tilde{i}_1} \wedge \ldots \wedge dx_{\tilde{i}_p}\right)}_{=:\omega_2}$$

$$\overset{\text{Def.}}{=} \begin{cases} 0 & \text{falls } \omega_1 \neq \omega_2 \\ \operatorname{sgn}\begin{pmatrix} 1 & \ldots & p & p+1 & \ldots & n \\ i_1 & \ldots & i_p & j_1 & \ldots & j_{n-p} \end{pmatrix} \cdot dx_{i_1} \wedge \ldots \wedge dx_{i_p} \wedge dx_{j_1} \wedge \ldots \wedge dx_{j_{n-p}} & \text{sonst} \end{cases}$$

   wegen der Eindeutigkeit der Permutation. Also folgt $\omega_1 \wedge *\omega_2 = \omega_2 \wedge *\omega_1$ für beliebige p-Formen und damit die Behauptung.

(c) Für $\omega = \sum_{i_1<\ldots<i_p} a_{i_1\ldots i_p} dx_{i_1} \wedge \ldots \wedge dx_{i_p}$ gilt

$$\begin{aligned}
&\omega \wedge *\omega \\
&\overset{\text{Def.}}{=} \quad \underbrace{\operatorname{sgn}\begin{pmatrix} 1 & \ldots & p & p+1 & \ldots & n \\ i_1 & \ldots & i_p & j_1 & \ldots & j_{n-p}\end{pmatrix}}_{=:\varepsilon} \omega \wedge \left(\sum_{i_1<\ldots<i_p} a_{i_1\ldots i_p} \cdot dx_{j_1} \wedge \ldots \wedge dx_{j_{n-p}}\right) \\
&= \quad \varepsilon \cdot \left(\sum_{i_1<\ldots<i_p} a^2_{i_1\ldots i_p} \cdot dx_{i_1} \wedge \ldots \wedge dx_{i_p} \wedge dx_{j_1} \wedge \ldots \wedge dx_{j_{n-p}}\right) + 0 \\
&= \quad \sum_{i_1<\ldots<i_p} a_{i_1\ldots i_p} \cdot dx_{j_1} dx_1 \wedge \ldots \wedge dx_p \quad \geq \quad 0
\end{aligned}$$

und

$$\omega \wedge *\omega = 0 \quad \Leftrightarrow \quad a_{i_1\ldots i_p} = 0 \; \forall_{i_1<\ldots<i_p} \quad \Leftrightarrow \quad \omega = 0.$$

Aufgabe 40: *Sei die* 0*-Form* r *auf* $\mathbb{R}^n\backslash\{0\}$ *durch* $r(x) := \|x\|$ *definiert. Berechne* $dr \wedge (*dr)$.

Lösung: Es ist r auf $\mathbb{R}\backslash\{0\}$ stetig differenzierbar und es gilt

$$dr = \sum_{i=1}^n \frac{\partial r}{\partial x_i} dx_i = \sum_{i=1}^n \frac{x_i}{r(x)} dx_i,$$

und weiter

$$*(dr) = \sum_{i=1}^n \frac{x_i}{r(x)} * (dx_i) = \sum_{i=1}^n \frac{x_i}{r(x)} \cdot (-1)^{i-1} \cdot dx_1 \wedge \ldots \wedge \widehat{dx_i} \wedge \ldots \wedge dx_n.$$

Also ergibt sich

$$\begin{aligned}
dr \wedge *(dr) &= \sum_{i=1}^n \frac{(-1)^{i-1} \cdot x_i^2}{r(x)^2} \cdot dx_i \wedge dx_1 \wedge \ldots \wedge \widehat{dx_i} \wedge \ldots \wedge dx_n + 0 \\
&= \sum_{i=1}^n \frac{x_i^2}{r(x)^2} \cdot dx_1 \wedge \ldots \wedge dx_n \quad = \quad dx_1 \wedge \ldots \wedge dx_n.
\end{aligned}$$

Blatt 11 — J. Lohkamp/M. Förster

WS 2004/05 — Abgabe: Montag, 24.01.2005, 8:15 Uhr

Aufgabe 41: *Konstruiere eine Parametrisierung der Oberfläche*

$$\partial T := \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid (\sqrt{x^2+y^2} - 2)^2 + z^2 = 1\}$$

des Torus T.

Lösung: Betrachte

$$\gamma : \mathbb{R}^2 \to \partial T, \quad (\varphi, \psi) \mapsto ((2+\cos\psi)\cos\varphi, (2+\cos\psi)\sin\varphi, \sin\psi)\,.$$

Dann ist γ stetig differenzierbar und es gilt

1. $\mathrm{Bild}(\gamma) = \partial T$: Auf der einen Seite gilt

$$\begin{aligned}
&\left(\sqrt{((2+\cos\psi)\cos\varphi)^2 + ((2+\cos\psi)\sin\varphi)^2} - 2\right)^2 + \sin^2\psi \\
=\ & \left(\sqrt{(2+\cos\psi)^2(\cos^2\varphi + \sin^2\varphi)}\right)^2 + \sin^2\psi \\
=\ & \left(\sqrt{(2+\cos^{\psi})^2} - 2\right)^2 + \sin^2\psi \quad = \quad \cos^2\psi + \sin^2\psi \quad = \quad 1,
\end{aligned}$$

auf der anderen Seite setzt man

$$\psi := \arcsin z \qquad \text{und} \qquad \varphi := \arcsin\left(\frac{y}{2+\cos\arcsin z}\right),$$

um $\gamma(\varphi,\psi) = (x,y,z)$ zu erhalten.

2. $\mathrm{Rang}(D_{(\varphi,\psi)}\gamma) = 2$ für alle $(\varphi,\psi) \in \mathbb{R}^2$, denn

$$D_{(\varphi,\psi)}\gamma = \begin{pmatrix} -(2+\cos\psi)\sin\varphi & \sin\psi\cos\varphi \\ (2+\cos\psi)\cos\varphi & \sin\psi\sin\varphi \\ 0 & \cos\psi \end{pmatrix}$$

und

$$\det\begin{pmatrix} -(2+\cos\psi)\sin\varphi & \sin\psi\cos\varphi \\ (2+\cos\psi)\cos\varphi & \sin\psi\sin\varphi \end{pmatrix} = (-2+\cos\psi)\sin\psi,$$

d.h. es nur für $\psi \in \pi\mathbb{Z}$ könnte der Rang kleiner als 2 sein. Aber wegen der letzten Zeile ist der Rang auch an diesen Stellen 2, d.h. die Jacobi-Matrix hat überall vollen Rang.

Aufgabe 42: *Für die* 2*-dimensionale Einheitssphäre ohne den Nordpol* $S^2\backslash\{(0,0,1)\} \subset \mathbb{R}^3$ *ist durch stereographische Projektion*

$$\gamma : \mathbb{R}^2 \to S^2\backslash\{(0,0,1)\}, \quad (x,y) \mapsto \left(\frac{2x}{1+x^2+y^2}, \frac{2y}{1+x^2+y^2}, \frac{1-x^2-y^2}{1+x^2+y^2}\right)$$

eine Parametrisierung gegeben. Berechne

$$\int_\gamma (x^2+y^2+z^2)^{-\frac{3}{2}}\,(x\cdot dy\wedge dz - y\cdot dx\wedge dz + z\cdot dx\wedge dy)\,.$$

LÖSUNG: Es gilt

$$D_{(x,y)}\gamma = \frac{1}{(1+x^2+y^2)^2}\cdot\begin{pmatrix} 2(1-x^2+y^2) & -4xy \\ -4xy & 2(1+x^2-y^2) \\ -4x & -4y \end{pmatrix}$$

und daher

$$\begin{aligned}
dy\wedge dz\left(\gamma(x,y), \frac{\partial}{\partial x}\gamma(x,y), \frac{\partial}{\partial y}\gamma(x,y)\right) &= \frac{\det\begin{pmatrix} -4xy & 2(1+x^2-y^2) \\ -4x & -4y \end{pmatrix}}{(1+x^2+y^2)^4} = \frac{8x}{(1+x^2+y^2)^3} \\
dx\wedge dz\left(\gamma(x,y), \frac{\partial}{\partial x}\gamma(x,y), \frac{\partial}{\partial y}\gamma(x,y)\right) &= \frac{\det\begin{pmatrix} 2(1-x^2+y^2) & -4xy \\ -4x & -4y \end{pmatrix}}{(1+x^2+y^2)^4} = \frac{-8y}{(1+x^2+y^2)^3} \\
dx\wedge dy\left(\gamma(x,y), \frac{\partial}{\partial x}\gamma(x,y), \frac{\partial}{\partial y}\gamma(x,y)\right) &= \frac{\det\begin{pmatrix} 2(1-x^2+y^2) & -4xy \\ -4xy & 2(1+x^2-y^2) \end{pmatrix}}{(1+x^2+y^2)^4} = \frac{4(1-x^2-y^2)}{(1+x^2+y^2)^3}
\end{aligned}$$

Daraus ergibt sich

$$\begin{aligned}
&\int_\gamma (x^2+y^2+z^2)^{-\frac{3}{2}}\,(x\cdot dy\wedge dz - y\cdot dx\wedge dz + z\cdot dx\wedge dy)\\
&= \int_{\mathbb{R}^2} \underbrace{\left(\frac{4x^2+4y^2+(1-x^2-y^2)^2}{(1+x^2+y^2)^2}\right)^{-\frac{3}{2}}}_{=1} \cdot \frac{16x^2+16y^2+4(1-x^2-y^2)^2}{(1+x^2+y^2)^4}\,d\mu(x,y)\\
&= \int_{\mathbb{R}^2} \frac{4}{(1+x^2+y^2)^2}\,d\mu(x,y) \quad \overset{a=1+x^2}{=} \quad 4\cdot\int_{\mathbb{R}} \left[\frac{y}{2a(a+y^2)} + \frac{\arctan\left(\frac{y}{\sqrt{a}}\right)}{2a^{\frac{3}{2}}}\right]_{-\infty}^{\infty} d\mu(x)\\
&= 4\cdot\int_{\mathbb{R}} \frac{\pi}{(1+x^2)^{\frac{3}{2}}}\,d\mu(x) \quad = \quad 4\pi\left[\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}\right]_{\infty}^{\infty} \quad = \quad 8\pi.
\end{aligned}$$

Aufgabe 43: *Sei $\gamma : T \to Bild(\gamma) \subset \mathbb{R}^n$ eine Parameterdarstellung einer p-Fläche $X := Bild(\gamma)$. Definiere den* Tangentialraum von X an der Stelle $\gamma(t)$ *als den p-dimensionalen affinen Unterraum*

$$T_{\gamma(t)}(X) := \gamma(t) + \left\langle \frac{\partial}{\partial t_1}\gamma(t), \ldots, \frac{\partial}{\partial t_p}\gamma(t) \right\rangle$$

und beweise für äquivalente Parameterdarstellungen $\gamma \sim \tilde{\gamma}$, dass $T_{\gamma(t)}(X) = T_{\tilde{\gamma}(s)}(X)$, wobei $\tilde{\gamma} = \gamma \circ \phi$ für einen Diffeomorphismus mit positiver Funktionaldeterminante gilt sowie $\tilde{\gamma}(s) = \gamma(t)$.

Lösung: Betrachte $\tilde{\gamma} : S \to X$ mit $\tilde{\gamma} = \gamma \circ \phi$ für einen Diffeomorphismus $\phi : S \to T$ mit positiver Funktionaldeterminante $D_s\phi$. Sei $s := \phi^{-1}(t) \in S$, d.h. mit $\tilde{\gamma}(s) = \gamma(t)$. Dann gilt

$$\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial s_i}\tilde{\gamma}(s) \quad &\overset{\text{Vor.}}{=} \quad \frac{\partial}{\partial s_i}(\gamma\circ\phi)(s) \quad \overset{\text{KR}}{=} \quad \begin{pmatrix} \frac{\partial \gamma_1}{\partial t_1}(\phi(s)) & \ldots & \frac{\partial \gamma_1}{\partial t_p}(\phi(s)) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial \gamma_n}{\partial t_1}(\phi(s)) & \ldots & \frac{\partial \gamma_n}{\partial t_p}(\phi(s)) \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial s_i}\phi_1(s) \\ \vdots \\ \frac{\partial}{\partial s_i}\phi_p(s) \end{pmatrix}\\
&\overset{\phi(s)=t}{=} \quad \begin{pmatrix} \sum_{k=1}^p \frac{\partial}{\partial t_k}\gamma_1(t)\cdot\frac{\partial}{\partial s_i}\phi_k(s) \\ \vdots \\ \sum_{k=1}^p \frac{\partial}{\partial t_k}\gamma_n(t)\cdot\frac{\partial}{\partial s_i}\phi_k(s) \end{pmatrix} \quad = \quad \sum_{k=1}^p \underbrace{\frac{\partial}{\partial s_i}\phi_k(s)}_{=:\lambda_k\in\mathbb{R}} \cdot \frac{\partial}{\partial t_k}\gamma(t)
\end{aligned}$$

Also gilt $\frac{\partial}{\partial s_i}\tilde{\gamma}(s) \in \left\langle \frac{\partial}{\partial t_1}\gamma(t), \ldots, \frac{\partial}{\partial t_p}\gamma(t) \right\rangle$ für alle $i = 1, \ldots n$. Wegen $\tilde{\gamma}(s) = \gamma(t)$ folgt

$$\tilde{\gamma(s)} + \left\langle \frac{\partial}{\partial s_1}\tilde{\gamma}(s), \ldots, \frac{\partial}{\partial s_p}\tilde{\gamma}(s) \right\rangle \subset \gamma(t) + \left\langle \frac{\partial}{\partial t_1}\gamma(t), \ldots, \frac{\partial}{\partial t_p}\gamma(t) \right\rangle$$

und aus Dimensionsgründen $T_{\tilde{\gamma}(s)}X = T_\gamma(t)X$.