Aufgaben zur Vorlesung

Analysis III

Blatt 9 — J. Lohkamp/M. Förster

WS 2004/05 — Abgabe: Montag, 20.12.2004, 8:15 Uhr

Aufgabe 33 Sei $\omega = p(x,y)dx + q(x,y)dy$ eine in der offenen Menge $U \subset \mathbb{R}^2$ stetige 1-Form. Sei γ der (positiv, d.h. gegen den Uhrzeigersinn durchlaufene) Rand eines achsenparallelen in U enthaltenen Rechtecks.
Gebe eine explizite Formeln für $\int_\gamma \omega$ der Gestalt $\int_a^b (\dots)\, dt$ an.

Aufgabe 34: Sei

$$S^n := \{x \in \mathbb{R}^{n+1} \mid \|x\| = 1\}$$

die n*-dimensionale (Einheits-)Sphäre.*
Betrachte die offene Menge $U := \{x \in \mathbb{R}^{n+1} \,|\, x_{n+1} \neq 1\} \subset \mathbb{R}^{n+1}$ und zeige, dass es eine stetig partiell differenzierbare Abbildung $\varphi : U \to \mathbb{R}^n$ gibt, so dass die Einschränkung von φ auf $S^n \cap U = S^n \backslash \{(0,\dots,0,1)\}$ eine bijektive Abbildung

$$\varphi|_{S^n \cap U} : S^n \cap U \to \mathbb{R}^n$$

induziert. Verdeutliche die Abbildung φ für den Fall $n = 1$ durch eine Skizze.

Aufgabe 35: Sei $U \subset \mathbb{R}^n$ offen, $\gamma : [a,b] \to \mathbb{R}^n$ ein glatter Weg in U und $\mathbf{v} : U \to \mathbb{R}^n$ eine stetiges Vektorfeld auf U. Beweise

$$\left| \int_\gamma \langle \mathbf{v}, d\mathbf{x} \rangle \right| \quad \leq \quad \mathrm{L}(\gamma) \cdot \sup_{x \,\in\, \mathrm{Bild}(\gamma)} \{\, |\, \mathbf{v}(x) \,|\, \}\,,$$

wobei $\mathrm{L}(\gamma)$ die (euklidische) Länge des Weges γ bezeichnet.[1]

Aufgabe 36: Sei $U \subset \mathbb{R}^n$ offen, $f : U \to \mathbb{R}$ eine stetig differenzierbare Funktion und $\gamma : [0,1] \to U$ ein zweimal stetig differenzierbarer Weg, welcher für das Vektorfeld $\mathbf{v} := -\mathrm{grad}(f)$ die Bedingung

$$\gamma''(t) = \mathbf{v}(\gamma(t))$$

für alle $t \in [0,1]$ erfüllt. Beweise für $0 \leq t_1 \leq t_2 \leq 1$

$$\frac{1}{2} \cdot \left[\langle \gamma'(t), \gamma'(t) \rangle \right]_{t_1}^{t_2} = f\left(\gamma(t_1)\right) - f\left(\gamma(t_2)\right).$$

---

[1] **Erinnerung/Hinweis:**

$$\int_\gamma \langle \mathbf{v}, d\mathbf{x} \rangle := \int_a^b \langle \mathbf{v}(\gamma(t)), \gamma'(t) \rangle \; dt$$