Aufgaben zur Vorlesung

Analysis III

Blatt 5 — J. Lohkamp/M. Förster
WS 2004/05 — Abgabe: Montag, 22.11.2004, 8:15 Uhr

Aufgabe 17: Sei $f : M \to \mathbb{R}$ messbar und $F \in \mathcal{L}^1(M)$ mit $|f(x)| \leq F(x)$ fast überall. Zeige, dass auch f Lebesgue-integrierbar ist.

Aufgabe 18: Sei $M \subset \mathbb{R}^n$ Lebesgue-messbar und $f : M \to \mathbb{R}$ eine nicht-negative Funktion. Zeige: f ist genau dann Lebegue-integrierbar , wenn

$$M_f := \{(x, z) \in M \times \mathbb{R} \mid 0 \leq z < f(x)\} \subset \mathbb{R}^n$$

Lebesgue-messbar ist. In diesem Fall gilt

$$\int_M f d\mu_n = \mu_{n+1}(M_f),$$

wobei μ_{n+1} das $(n + 1)$-dimensionale Lebesgue-Maß bezeichnet.[1]

Aufgabe 19: Beweise: Jede Riemann-integrierbare Funktion $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ ist Lebesgue-integrierbar und es gilt

$$\int_a^b f(x)dx = \int_{[a,b]} f(x)d\mu(x),$$

wobei die linke Seite der Gleichung das Riemann-Integral und die rechte Seite das Lebesgue-Integral bezeichnet.

Aufgabe 20: Zeige anhand eines Beispiels, dass im Satz über die majorisierte Konvergenz die Bedingung der Majorisierung nicht weggelassen werden kann.

---

[1] Hinweis: Zeige, dass durch

$$g_k(x) := \begin{cases} \frac{j-1}{2^k} & \text{für } x \in M_j^k := \{x \in M \mid \frac{j-1}{2^k} \leq f(x) < \frac{j}{2^k}\} \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

ein Folge nicht-negativer einfacher Funktionen $g_k : M \to \mathbb{R}$ definiert wird, die monoton wächst und gleichmäßig gegen f konvergiert.
Außerdem darf benutzt werden: Für ein beschränktes Intervall $J \subset \mathbb{R}$ und eine Menge $M \subset \mathbb{R}^n$ ist $M \times J$ genau dann messbar, wenn M messbar ist, und in diesem Fall gilt $\mu_{n+1}(M \times J) = \mu_n(M) \cdot \mu_1(J)$.