Aufgaben zur Vorlesung

Analysis III

Blatt 4 — J. Lohkamp/M. Förster

WS 2004/05 — Abgabe: Montag, 15.11.2004, 8:15 Uhr

Aufgabe 13: Sei $M \subset \mathbb{R}^n$ eine Lebesgue-messbare Menge. Zeige, dass $f : M \to \mathbb{R}$ genau dann Lebesgue-messbar ist, wenn das Urbild $f^{-1}(J)$ für jedes Intervall $J \subset \mathbb{R}$ Lebesgue-messbar ist.

Aufgabe 14: Sei $U \subset \mathbb{R}^2$ eine offene Teilmenge und $\varphi : U \to \mathbb{R}$ stetig. Sei weiterhin $M \subset \mathbb{R}^n$ und $f_1, f_2 : M \to \mathbb{R}$ Lebesgue-messbar mit $\{(f_1(x), f_2(x)) \mid x \in M\} \subset U$. Zeige, dass auch

$$f : M \to \mathbb{R}, \quad x \mapsto \varphi(f_1(x), f_2(x))$$

eine Lebesgue-messbare Abbildung ist.

Aufgabe 15: Eine Teilmenge $M \subset \mathbb{R}^n$ heißt *Lebesgue-messbar mit unendlichem Maß* $\mu(M) = \infty$, falls für jedes $r > 0$ der Durchschnitt $B_r(0) \cap M$ der Kugel vom Radius r um den Koordinatenursprung mit der Menge M Lebesgue-messbar ist und die Funktion $\alpha : \mathbb{R}^{>0} \to \mathbb{R}^{\geq 0}, r \mapsto \mu(M \cap B_r(0))$ nicht beschränkt ist. Beweise oder widerlege:

1. Jede monoton wachsende Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ist Lebesgue-messbar.
2. Seien $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ stetig und es gelte $f = g$ *fast überall*, d.h. die Menge
$$\{x \in \mathbb{R} \mid f(x) \neq g(x)\} \subset \mathbb{R}$$
ist eine Nullmenge. Dann gilt bereits $f = g$, d.h. $f(x) = g(x)$ für alle $x \in \mathbb{R}$.

Aufgabe 16: Sei $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ stetig. Definiere Funktionen $p_n : [0,1] \to \mathbb{R}$ durch

$$p_n(x) := \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k} \cdot f\left(\frac{k}{n}\right).$$

1. Zeige, dass speziell für $f(x) = 1, f(x) = x$ und $f(x) = x(1-x)$ die zugehörige Folge $(p_n)_{n\in\mathbb{N}}$ gleichmäßig gegen f konvergiert, beachte $x \in [0,1]$.
2. Beweise für $x \in [0,1]$ die Gleichung
$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k} \cdot \left(x - \frac{k}{n}\right)^2 = \frac{1}{n} x(1-x)$$
und folgere
$$0 \leq \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k} \cdot \left(x - \frac{k}{n}\right)^2 \leq \frac{1}{4n}.$$
3. Zeige, dass die Folge $(p_n)_{n\in\mathbb{N}}$ gleichmäßig gegen f konvergiert. Teil 1 und 2 dürfen benutzt werden. [1]

---

[1] Es folgt, dass der Raum $P([a,b])$ aller Polynomfunktionen $p : [a,b] \to \mathbb{R}$ dicht in dem vollständigen Raum $C([a,b])$ aller stetigen Funktionen $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ liegt, wenn wir die $C([a,b])$ als normierten Vektorraum mit der Supremumsnorm $\|\cdot\|_\infty$ betrachten. Dabei heißt eine Teilmenge $A \subset X$ eines topologischen Raumes X *dicht*, falls $\overline{A} = X$ gilt. Ein vollständiger normierter Vektorraum heißt auch *Banachraum*.