Aufgaben zur Vorlesung

Analysis III

Blatt 3 | J. Lohkamp/M. Förster
WS 2004/05 | Abgabe: Montag, 08.11.2004, 8:15 Uhr

Aufgabe 9: Sei $X = \mathbb{Q} \cap (0,1]$ und $\mathcal{M}$ das Mengensystem, welches aus allen Mengen der Gestalt $M = \mathbb{Q} \cap (a,b]$ mit $0 \leq a < b \leq 1$ besteht. Sei $f : \mathcal{M} \to [0,1]$ definiert durch $f(\mathbb{Q} \cap (a,b]) = b - a$. Beweise, dass f nicht σ-additiv ist.

Aufgabe 10: Beweise, dass durch $M_1 \sim M_2 :\Leftrightarrow \mu(M_1 \Delta M_2) = 0$ eine Äquivalenzrelation auf der Menge $\mathfrak{M}$ aller Lebesgue-messbaren Funktionen erklärt ist. Zeige weiterhin, dass $d([M_1],[M_2]) := \mu(M_1 \Delta M_2)$ eine (wohldefinierte) Metrik auf der Menge $\widetilde{\mathfrak{M}}$ aller Äquivalenzklassen bezüglich $\sim$ definiert ist.

Aufgabe 11: Es sei X eine Menge sowie $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$ und $(B_n)_{n \in \mathbb{N}}$ Folgen von Teilmengen von X. Der *(mengentheoretische) Limes superior* und *(mengentheoretische) Limes inferior* sind definiert als

$$\limsup_{n\to\infty} A_n := \bigcap_{m=1}^{\infty} \bigcup_{n \geq m} A_n \qquad \text{bzw.} \qquad \liminf_{n\to\infty} \bigcup_{m=1}^{\infty} \bigcap_{n \geq m} A_n.$$

Zeige

$$\begin{aligned}
\liminf_{n\to\infty}(A_n \cap B_n) &\subset \liminf_{n\to\infty} A_n \cap \liminf_{n\to\infty} B_n \\
&\subset \liminf_{n\to\infty} A_n \cap \limsup_{n\to\infty} B_n \\
&\subset \limsup_{n\to\infty}(A_n \cap B_n) \qquad \subset \quad \limsup_{n\to\infty} A_n \cap \limsup_{n\to\infty} B_n.
\end{aligned}$$

Sei weiter (M_n) eine Folge Lebesgue-messbarer Mengen mit $M_i \subset M$ für eine Lebesgue-messbare Menge M. Beweise, dass auch $\limsup_{n\to\infty} M_n$ und $\liminf_{n\to\infty} M_n$ messbar sind.

Aufgabe 12: Betrachte den Mengenring $\mathfrak{M}$ und eine additive Funktion $f : \mathfrak{M} \to [0,\infty)$. Beweise die Äquivalenz der folgenden Bedingungen

1. f ist σ-additiv.

2. Für alle Folgen $M_1 \subset M_2 \subset \ldots$ mit $M_i, M := \bigcup_{i=1}^{\infty} M_i \in \mathfrak{M}$ gilt

$$f(M) = \lim_{i\to\infty} f(M_i).$$