Fraktale Geometrie

F. Springer (felix.springer@uni-muenster.de) 6. September 2008

Geometrie kommt vom griechischen $\gamma\varepsilon\omega\mu\acute{\varepsilon}\tau\rho\eta\zeta$, was „Erdmaß“ oder „Landvermessung“ bedeutet. In der Schule begegnet einem meist nur die euklidische Geometrie, die sich mit regelmäßigen Flächen und Körpern im zwei- oder dreidimensionalen Raum beschäftigt. Daneben gibt es noch eine ganze Reihe anderer Geometrien, denen man in der Schule selten bis nie begegnet.

Einer dieser Geometrien, der fraktalen Geometrie, die sich mit besonders unregelmäßigen Objekten beschäftigt, wollen wir uns heute widmen.

1 Was ist Dimension?

Als erstes wollen wir uns mit der Frage beschäftigen, was wir unter dem Begriff Dimension verstehen können. In der euklidischen Geometrie ist die Dimension die Anzahl der unterschiedlichen Richtungen, in die man sich bewegen kann. In der Physik spricht man von Freiheitsgraden.

Beispiel 1.1. In der Ebene können wir uns nach vorne/hinten und nach rechts/links bewegen. Wir haben also im Wesentlichen zwei Richtungen, in die wir uns bewegen können. Alle anderen Bewegungen können wir als Kombination der obigen Bewegungen darstellen.

Das gleiche können wir auch im Raum machen. Die Richtungen vor/zurück und rechts/links bleiben uns natürlich erhalten. Dazu kommt noch die Möglichkeit sich nach oben und unten zu bewegen, wenn wir mal von Schwerkraft und der Erdoberfläche absehen. Wir haben also drei Dimensionen.

Neben der Dimension eines Raumes wollen wir uns aber auch mit der Dimension von Objekten beschäftigen. Wie könnte dies aussehen? Wir werden sehen, dass ein Zusammenhang zwischen der Volumensänderung eines Körpers unter Skalierung (also beim Vergrößern oder Verkleinern) und der Dimension besteht. Diesen wollen wir nun aufdecken.

Betrachtet dazu die erste Reihe der Objekte auf eurem Arbeitsblatt. Mit s bezeichnen wir den Skalierungsfaktor, mit D die Dimension und mit a die Anzahl der verkleinerten Kopien, die wir in die Originalfigur nebeneinander legen können.

Welchen Zusammenhang könnt ihr finden?

Eine Möglichkeit besteht in diesem Zusammenhang:

$$a = \frac{1}{s^D}$$

oder umgestellt nach der Dimension

$$D = \frac{\log a}{\log \frac{1}{s}}.$$

2 Wichtige Begriffe

Um uns mit der Fraktalen Geometrie richtig beschäftigen können, müssen wir uns mit den wichtigsten Begriffen vertraut machen. Diese Begriffe sind Selbstähnlichkeit, Iteration und Fraktal. Letzteres war irgendwie zu erwarten.

Definition 2.1. Eine Menge M heißt *selbstähnlich*, falls es eine endliche Menge von Ähnlichkeitsabbildungen $S_1, \ldots, S_n$ gibt, so dass

$$M = \bigcup_{i=1}^{n} S_i(M)$$

ist.

Workshop zur „fraktalen Geometrie“, 6. September 2008, WWU Münster

Für uns reicht es zunächst, wenn wir einfach davon ausgehen, dass die Ähnlichkeitsabbildungen einfach Stauchungen um einen festen Faktor sind, deren Bilder dann verschoben werden. Betrachten wir dazu ein paar Bilder, die im Anhang auf Seite 7 zu finden sind.

Selbstähnlichkeit ist eine wesentliche Eigenschaft, die wir bei Fraktalen - da taucht der Begriff schon auf - finden.

Um diese Fraktale zu konstruieren benötigen wir das Hilfsmittel der Iteration, die wir jetzt definieren wollen.

Definition 2.2. Es sei $Z \in \mathcal{Z}$ ein Zustand aus einer Zustandsmenge. Und $f: \mathcal{Z} \to \mathcal{Z}$ eine Abbildungsvorschrift. Eine Folge $Z_0 := Z,\ Z_{n+1} := f(Z_n)$ heißt *Iteration*. Die Folge kann endlich oder unendlich sein.

Was können wir uns darunter vorstellen? Betrachten wir ein einfaches

Beispiel 2.3. Es sei $\mathcal{Z} := \mathbb{R}$ und $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ gegeben durch $x \mapsto x^2$. Wir setzen $Z_0 := z$ und berechnen iterativ die Folgenglieder $Z_1 = z^2,\ Z_2 = z^4, \ldots, Z_n = z^{2n}$.

Wir haben schon erwähnt, dass Fraktale etwas irreguläres, fein-verzweigtes sind. Wir sind aber noch nicht in der Lage präzise zu definieren, was ein Fraktal ist. Das muss uns aber auch nicht weiter grämen, da es bisher noch keine allgemein anerkannte Definition gibt, die die Mehrzahl der Mathematiker akzeptieren würde.

Die meisten Autoren begnügen sich damit, Fraktale über einige Eigenschaften so zu charakterisieren, wie das für ihre Zwecke am sinnvollsten ist. Genau das wollen wir auch machen.

Definition 2.4. Eine Menge F heißt *Fraktal*, wenn sie selbstähnlich ist, durch Iteration konstruiert werden kann und zu unregelmäßig ist, um mit den Mitteln der euklidischen Geometrie beschrieben zu werden.

3 Konstruktion von Fraktalen

Jetzt kommen wir zum eigentlichen Thema und werden auch ein paar schöne Bilder sehen. Wie entstehen Fraktale also? Es ist naheliegend nach allem, was wir schon kennen gelernt haben, dass Fraktale durch einen iterativen Prozess konstruiert werden. Wir werden dazu das Werkzeug der Mehrfach-Verkleinerungs-Kopier-Maschine (MVKM) kennen lernen.

Dazu denken wir an einen Kopierer, der die Möglichkeit hat, Bilder mittels einer Linse um einen bestimmten Faktor zu verkleinern. Lassen wir ein Bild kopieren und immer wieder die Kopie als neues Ausgangsbild verwenden, dann ist klar, dass das Bild nach wenigen Schritten ganz klein sein wird und bald nicht mehr zu sehen ist.

Aber was passiert, wenn der Kopierer mehrere Linsen hat und die Bilder an bestimmte Stellen der Ausgabe platziert?

Wir betrachten also ein Kopiergerät, das mehrere Linsen hat, die möglicherweise unterschiedliche Verkleinerungsfaktoren haben. Jede Linse schiebt das Bild, das sie erzeugt, an eine bestimmte Stelle. Eine solche Maschine nennen wir Mehrfach-Verkleinerungs-Kopier-Maschine (MVKM).

Wir wollen uns ein paar solcher Maschinen ansehen und die Bilder nach einigen Durchgängen betrachten. Schemata dafür finden sich im Anhang auf Seite 8.

4 Typen von Dimensionen

Wir haben uns oben schon an einen ersten Dimensionsbegriff erinnert, nämlich den der *euklidischen Dimension*. Wir werden aber bald sehen, dass dieser Dimensionsbegriff in manchen Fällen äußerst unbefriedigend ist. Doch zunächst wollen wir einmal die verschiedenen Dimensionsbegriffe charaktersieren und definieren.

Definition 4.1. Es sei V ein Vektorraum. Seine *euklidische Dimension* ist die maximale Mächtigkeit einer Menge linear unabhängiger Vektoren in V oder - was äquivalent ist - die minimale Mächtigkeit eines Erzeugendensystems von V.

Dazu betrachten wir einige Beispiele.

Beispiel 4.2. (a) Die reelle Zahlengerade $\mathbb{R}$ hat die euklidische Dimension 1.

(b) Die reelle Zahlenebene $\mathbb{R}^2$ hat die euklidische Dimension 2.

(c) Der reelle Raum $\mathbb{R}^3$, also der Raum, in dem wir - idealisiert gesehen - leben, hat die euklidische Dimension 3.

Der Exponent n bei der Darstellung des Raumes $\mathbb{R}^n$ gibt jeweils die Dimension des Raumes an.

Da sich dieser Dimensionsbegriff als insgesamt sehr praktisch herausgestellt hat, suchen wir nun nach einer Verallgemeinerung dieses Konzepts, mit deren Hilfe wir auch unregelmäßige Objekte beschreiben können. Wir werden hier nur auf zwei Möglichkeiten genauer und auf eine weitere Möglichkeit kurz eingehen. Es gibt aber noch unzählige weitere Arten, den Begriff der euklidischen Dimension zu Verallgemeinern, die je nach Situation besser oder schlechter geeignet sind.

Als erstes werden wir dabei die sogenannte Selbstähnlichkeitsdimension kennen lernen, die uns bei der Analyse von (mathematischen) Fraktalen helfen wird.

Definition 4.3. Es sei O ein selbstähnliches Objekt, bei dem alle Ähnlichkeitstransformationen, die zur Konstruktion verwendet werden, den gleichen Skalierungsfaktor s haben. Außerdem gelte, dass die Bilder von O unter den einzelnen Ähnlichkeitsabbildungen nahezu disjunkt sind. Es sei a die Anzahl dieser Transformationen. Dann ist die *Selbstähnlichkeitsdimension* D von O als Lösung der Gleichung $a = \frac{1}{s^D}$ definiert. Lösen wir die Gleichung auf, erhalten wir also $D = \frac{\log a}{\log \frac{1}{s}}$.

Wir sehen hier schon, dass wir für eine Verallgemeinerung des Dimensinosbegriff, bei der wir die Dimension dennoch einfach bestimmen können, starke Einschränkungen in Bezug auf die zu untersuchenden Objekte hinnehmen müssen.

Wir wollen nun die Dimension einiger Beispiele bestimmen.

Beispiel 4.4. (a) Die Koch-Kurve hat Dimension $D = \frac{\log 4}{\log 3} \approx 1.26$.

(b) Das Sierpinski-Dreieck hat Dimension $D = \frac{\log 3}{\log 2} \approx 1.58$.

(c) Der Sierpinski-Teppich hat Dimension $D = \frac{\log 8}{\log 3} \approx 1.89$.

(d) Der Sierpinski-Tatraeder hat Dimension $D = \frac{\log 4}{\log 2} = 2$.

Das letzte Beispiel lässt uns stutzig werden. Bisher hatten alle Fraktale eine nicht ganzzahlige Dimension, was ja namensgebend ist. Dies ist allerdings nicht zwingend nötig, wie wir an diesem Beispiel sehen.

Wir wollen nun wieder eine etwas größere Klasse an Mengen zulassen, die wir nun betrachten. Wir kommen daher auf eine Möglichkeit, einen Dimensionsbegriff zu finden, den wir auf Objekte anwenden können, denen jegliche Regularität fehlt. Wir können diesen dennoch einigermaßen einfach bestimmen.

Bei der sogenannten Masse-Radius-Dimension geht es darum einen Zusammenhang zwischen Volumen und Masse eines Objektes zu finden. Wir können davon ausgehen, dass eine gewisse Proportionalitätsbeziehung zwischen diesen beiden Daten besteht.

Betrachten wir diese Beziehung genauer, m sei dabei die Masse des Objektes, r der Radius und k eine Proportionalitätskonstante (Dichte) und D wie immer die Dimension:

$$m \sim r^D$$
$$m = k \cdot r^D$$

Wir können der Einfachheit halber dabei annehmen, dass die Daten normiert sind, also $k = 1$ gilt.

$$\Rightarrow \quad D = \frac{\log m}{\log r}$$

Definition 4.5. Das oben bestimmte D wird als *Masse-Radius-Dimension* bezeichnet.

Wie können wir D nun bestimmen? Wie wir gesehen haben, besteht zwischen den Daten $\log m$ und $\log r$ ein linearer Zusammenhang. Wenn wir eine Reihe von Radien vorgeben und die zugehörigen Massen bestimmen, können wir mittels Interpolation die Dimension bestimmen. Dies werden wir später noch experimentell machen.

Zunächst wollen wir noch eine Methode kennen lernen, die sich leicht mit dem Computer implementieren lässt. Es handelt sich dabei um die Boxdimension.

Definition 4.6. Über ein Objekt O legen wir (regelmäßige) Gitter G mit Gitterweite g und Zellen G_i. Nun betrachten wir die einzelnen Zellen und bestimmen die Mächtigkeit N der Menge $\{i : O \cap G_i \neq \emptyset\}$. Wir definieren nun die *Box-Dimension* von O als

$$D = \lim_{g \to 0} \frac{\log N}{-\log g}.$$

Aufgrund der Grenzen der Darstellbarkeit müssen wir hier bei der tatsächlichen Bestimmung der Dimension einen geeigneten Bereich der Gitterweite finden, in dem wir die Berechnungen durchführen.

5 Bestimmung der Dimension an Beispielen

Wir werden abschließend noch bei einigen Beispielen die Dimension bestimmen. Wir kommen nun also zu dem oben versprochenen Experiment.

Aufgabe 5.1. Nehmen Sie eine Waage, eine Schiebelehre oder ein Maßband und Zeitungspapier. Nehmen Sie eine halbe Seite des Papiers und zerknüllen Sie es zu einer Kugel. Bestimmen Sie nun den Radius und die Masse dieser Kugel. Anschließend basteln Sie größere Kugeln mit einer ganzen und mit zwei Seiten Papier und bestimmen diese Daten ebenso.

Mit Hilfe der von Ihnen gesammelten Daten werden wir nun die Masse-Radius-Dimension bestimmen.

Aufgabe 5.2. Denken Sie sich einige MVKMen aus und bestimmen Sie die Dimension der entstehenden Fraktale. Überlegen Sie sich auch wie diese Fraktale aussehen könnten.

Tipp: Sie können sich solche Fraktale auch mit Hilfe eines Fraktalgenerators zeichnen lassen. Im Internet finden Sie eine Menge solcher Generatoren, wie den „BRAZIL Fractal Builder“ (http://www.geocities.com/CapeCanaveral/Lab/1837/index_a.html) oder das Programm „Fractint“ (http://spanky.triumf.ca/www/fractint/fractint.html).

Literatur

Die Literaturhinweise sind nach aufsteigender Schwierigkeit sortiert. Während man die jeweils ersten Bücher einfach lesen kann, sind die weiteren Bücher anspruchsvoller.

[1] H.O. Peitgen, H. Jürgens, D. Saupe. *Bausteine des Chaos - Fraktale*, Springer-Verlag Berlin; Klett-Cotta Verlag Stuttgart, 1992.

[2] Ch. Pöppe. *Die unvermeidliche Langsamkeit des Seins*, in: Spektrum der Wissenschaft, 1997, 9, Seite 25f.

[3] I. Stewart. *Die Allgegenwart des Sierpinski-Dreiecks*, in: Spektrum der Wissenschaft, 2000, 2, Seite 106/107.

[4] G. Musser. *Die fraktale Handy-Antenne*, in: Spektrum der Wissenschaft, 2000, 2, Seite 107.

[5] M.F. Barnsley. *Fractals Everywhere*, Second Edition, Academic Press San Diego, 1998.

[6] K. Falconer. *Fractal Geometry*, Second Edition, Wiley Chichester, 2003.

Ausgehend von der fraktalen Geometrie bietet sich auch die Beschäftigung mit der Chaostheorie an. Das erste Buch lässt sich auch hier einfach lesen, das zweite ist etwas anspruchsvoller.

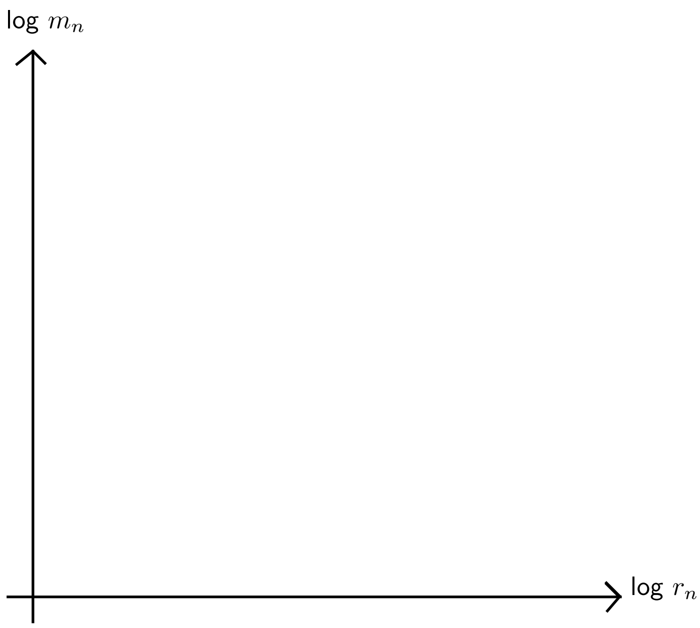
[7] H.O. Peitgen, H. Jürgens, D. Saupe. *Bausteine der Ordnung - Chaos*, Rowohlt Taschenbuch Verlag GmbH Hamburg, 1998.

[8] K.T. Alligood, T.D. Sauer, J.T. Yorke. *Chaos - An Introduction to Dynamical Systems*, Springer Verlag New York, 1996.

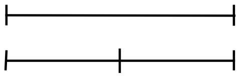
Arbeitsblatt: Bestimmung der Masse-Radius-Dimension einer Papierkugel und der Selbstähnlichkeitsdimension einiger Objekte

Größe	0	1	2	3	4	5
Masse (in g)						
Masse normiert m_n						
$\log m_n$						
Radius r (in mm)						
Radius normiert r_n						
$\log r_n$						
$\log m_n : \log r_n$						

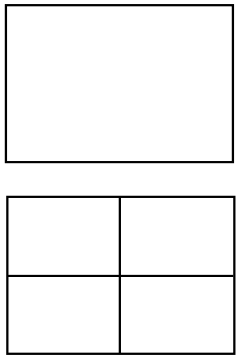
Zeichnen Sie ein Diagramm für $\log m_n$ über $\log r_n$.



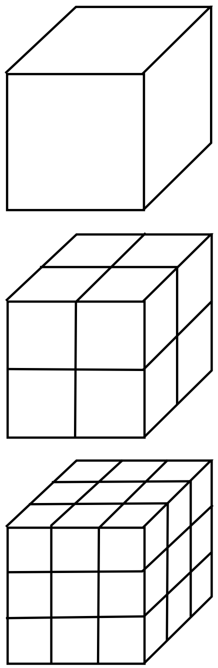
Ergebnis:



Strecke:

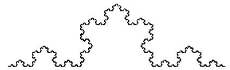


Rechteck:

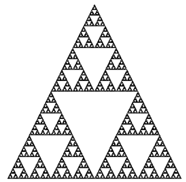


Würfel:

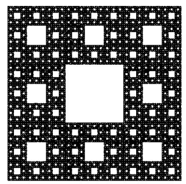
Koch-Kurve:



Sierpinski-Dreieck:

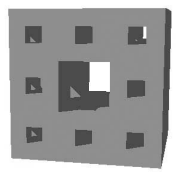


Sierpinski-Teppich:



Sierpinski-Tetraeder:

Menger-Schwamm:



Beispiele für MVKM