Es sei $f : X \to Y$ stetig. Der *Abbildungszylinder* Z_f ist der Quotientenraum

$$Z_f := ([0,1] \times X \coprod Y)/\sim$$

wobei $(x,1) \sim f(x)$.

Aufgabe 1. Fertigen Sie eine Skizze von Z_f an. Wenn $Y = *$, so heißt der Zylinder der konstanten Abbildung auf *Kegel* CX. Wie sieht der Kegel aus?

Seien $i : X \to Z_f$, $j : Y \to Z_f$, $r : Z_f \to Y$ definiert durch

$$i(x) = (0,x);\ j(y) = y;\ r(x,t) = f(x), r(y) = y.$$

Aufgabe 2. Zeigen Sie: $r \circ i = f$, $r \circ j = \mathrm{id}$ und dass $j \circ r$ homotop zur Identität auf Z_j ist. Insbesondere ist $r_* : \pi_n(Z_f,(x_0,0)) \to \pi_k(Y, f(x_0))$ ein Isomorphismus (man beachte, dass r keine punktierte Homotopieäquivalenz ist. Dass Homotopieäquivalenzen Isomorphismen induzieren, wird in der Vorlesung erst später gezeigt).

Wir definieren $\pi_n(f,x_0) := \pi_n(Z_f, X, x_0)$, wobei X als Unterraum von Z_f aufgefasst werde, vermittels i.

Aufgabe 3. Sei $X \neq \emptyset$ und f 0-zusammenhängend. Dann ist f n-zusammenhängend genau dann, wenn $\pi_k(f,x_0) = 0$ für alle $x_0 \in X$ und für alle $k \leq n$. Hinweis: Vorsicht ist geboten, weil $\pi_1(f;x_0)$ und $\pi_0(X)$ keine Gruppenstrukturen haben.

Mathematisches Institut, Universität Münster, Einsteinstrasse 62, 48149 Münster, Bundesrepublik Deutschland