Übungen zur Vorlesung Topologie II

Blatt 6 J. Ebert
Abgabetermin: 27.11., in den Übungen.

Frageaufgabe 1. Formulieren Sie drei sinnvolle Fragen zum Inhalt der Vorlesung.

Aufgabe 2. Die *Grassmann-Mannigfaltigkeit* ist die Menge $\mathrm{Gr}_k(\mathbb{R}^n)$ aller k-dimensionalen Untervektorräume von $\mathbb{R}^n$. Es sei $q : \mathrm{St}_k(\mathbb{R}^n) \to \mathrm{Gr}_k(\mathbb{R}^n)$ die Abbildung, welche ein Tupel $(v_1, \ldots, v_k) \in \mathrm{St}_k(\mathbb{R}^n)$ auf den Unterraum $\mathrm{span}\{v_1, \ldots, v_k\}$ schickt. Offenbar (LA I) ist q surjektiv, und wir versehen $\mathrm{Gr}_k(\mathbb{R}^n)$ mit der Quotiententopologie. Zeigen Sie:

(1) Es gibt eine freie Rechtswirkung von $O(k)$ auf $\mathrm{St}_k(\mathbb{R}^n)$, so dass $\mathrm{St}_k(\mathbb{R}^n)/O(k) \cong \mathrm{Gr}_k(\mathbb{R}^n)$.
(2) Es gibt eine Zahl $m = m(n, k)$, so dass für alle $i \leq m$ gilt: $\pi_i(O(k)) \cong \pi_{i+1}(\mathrm{Gr}_k(\mathbb{R}^n))$. Hinweis: Aufgabe 4 vom letzten Blatt.

Aufgabe 3. Es sei $f : X \to Y$ stetig und $j : Y \to \mathrm{Cone}(f)$ die Inklusion. Sei (Z, z_0) ein punktierter Raum. Die Menge der Homotopieklassen $[X, Z]$ wird zu einer punktierten Menge; der Grundpunkt in $[X, Z]$ ist die Homotopieklasse der konstanten Abbildung $X \to z_0 \subset Z$. Zeigen Sie, dass die Sequenz

$$[\mathrm{Cone}(f), Z] \stackrel{-\circ j}{\to} [Y, Z] \stackrel{-\circ f}{\to} [X, Z]$$

eine exakte Sequenz von punktierten Mengen ist.

Aufgabe 4. Aus der Topologie I ist die Standard-CW-Struktur des komplex projektiven Raumes $\mathbb{CP}^n$ bekannt: Die zugehörige Filtrierung ist

$$* = (\mathbb{CP}^n)^{(0)} = (\mathbb{CP}^n)^{(1)} \subset (\mathbb{CP}^n)^{(2)} = \mathbb{CP}^1 = (\mathbb{CP}^n)^{(3)} \subset (\mathbb{CP}^n)^{(4)} = \mathbb{CP}^2 \ldots$$

(mit anderen Worten: $\mathbb{CP}^n$ hat je eine Zelle der Dimension $0, 2, 4, 6, \ldots, 2n$ und keine weiteren Zellen). Zeigen Sie, dass die Inklusion $j : \mathbb{CP}^1 \to \mathbb{CP}^n$ eine Bijektion

$$[\mathbb{CP}^n, \mathbb{CP}^n] \to [\mathbb{CP}^1, \mathbb{CP}^n] \ (= [S^2, \mathbb{CP}^n] \cong \pi_2(\mathbb{CP}^n) \cong \mathbb{Z})$$

induziert. Hinweis: fundamentaler Hochhebungssatz.

Aufgabe 5. Es sei $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ oder $\mathbb{R}$. Der Raum $\mathbb{K}^\infty = \cup_n \mathbb{K}^n$ trage die Kolimestopologie. Die multiplikative Gruppe $\mathbb{K}^\times$ operiert auf $\mathbb{K}^\infty \setminus 0$ durch Multiplikation, und der Quotient $(\mathbb{K}^\infty \setminus 0)/\mathbb{K}^\times$ ist homöomorph zum unendlichen projektiven Raum $\mathbb{KP}^\infty$. Nun identifizieren wir $\mathbb{K}^\infty$ mit dem Vektorraum $\mathbb{K}[t]$ aller Polynome. Zeigen Sie: die Multiplikation $(\mathbb{K}[t] \setminus 0) \times (\mathbb{K}[t] \setminus 0) \to (\mathbb{K}[t] \setminus 0)$ induziert eine Abbildung $\mathbb{KP}^\infty \times \mathbb{KP}^\infty \to \mathbb{KP}^\infty$, welche $\mathbb{KP}^\infty$ zu einen H-Raum macht. Eventuell auftretende Schwierigkeiten mit Produkten und Quotienten sind hier zu ignorieren.