Übungen zur Vorlesung Topologie II

Blatt 4 J. Ebert
Abgabetermin: 13.11., in den Übungen.

Leseaufgabe 1. Wiederholen Sie den zellulären Kettenkomplex eines CW-Komplexes X, welcher die singuläre Homologie berechnet.

Frageaufgabe 2. Formulieren Sie drei sinnvolle Fragen zum Inhalt der Vorlesung.

Aufgabe 3. Es sei X ein 1-zusammenhängender Raum. Zeigen Sie, dass X genau dann n-zusammenhängend ist, wenn X homologisch n-zusammenhängend ist, d.h. wenn $H_k(X;\mathbb{Z}) = 0$ für $1 \leq k \leq n$ gilt.

Aufgabe 4.

(1) Es sei X ein n-dimensionaler, n-zusammenhängender CW-Komplex. Zeigen Sie, dass $\pi_k(X) = 0$ für alle $k \geq 1$ gilt.

(2) Folgern Sie, dass ein nichtleerer zusammenhängender Graph Y asphärisch ist. Mit anderen Worten: ist Y ein 0-zusammenhängender, 1-dimensionaler CW-Komplex, so ist $\pi_k(Y) = 0$ für alle $k \geq 2$ zu folgern. Hinweis: Y besitzt eine universelle Überlagerung $\tilde{Y}$, welche wieder ein 1-dimensionaler CW-Komplex ist. Dies ist nicht ganz offensichtilich, aber hier ohne Beweis zu nutzen.

Aufgabe 5. Sei eine (punktierte) Abbildung $f: S^n \to S^n$ vom Grad d gegeben. Man könnte erwarten, dass $f_*: \pi_m(S^n) \to \pi_m(S^n)$ durch Multiplikation mit d gegeben ist. In dieser Aufgabe wird diese Vermutung widerlegt. Sei $\eta: S^3 = \{z \in \mathbb{C}^2 | \|z\| = 1\} \to S^2 = \mathbb{C}^+$ die Hopf-Faserung. Diese ist durch die Formel

$$\eta(z_1, z_2) := \begin{cases} z_1/z_2 & z_2 \neq 0 \\ \infty & z_2 = 0 \end{cases}$$

gegeben. In der Vorlesung wird gezeigt, dass $\pi_3(S^2) \cong \mathbb{Z}$ gilt und dass η ein Erzeuger ist. Nun seien $\lambda: S^3 \to S^3$ und $\kappa: \mathbb{C}^+ \to \mathbb{C}^+$ durch komplexe Konjugation gegeben.

(1) Zeigen Sie, dass $\eta \circ \lambda = \kappa \circ \eta$ gilt und wählen Sie geeignete Basispunkte in S^3 bzw. S^2, so dass η, λ und κ punktiert sind.

(2) Zeigen Sie, dass λ (punktiert) homotop zur Identität ist und folgern Sie, dass $\kappa_*[\eta] = [\eta] \in \pi_3(S^2)$ gilt.

(3) Was ist der Abbildungsgrad von κ?

Aufgabe 6. Es sei (X, A, x_0) ein punktiertes Raumpaar. Sei $\partial: \pi_2(X, A, x_0) \to \pi_1(A.x_0)$ der Verbindungshomomorphismus in der langen exakten Homotopiesequenz. Zeigen Sie, dass für $\alpha, \beta \in \pi_2(X, A, x_0)$ die Relation

$$\alpha\beta\alpha^{-1} = (\partial\alpha) \bullet \beta \in \pi_2(X, A, x_0$$

besteht ($\bullet$ bezeichnet die Wirkung von $\pi_1(A, x_0)$ auf $\pi_2(X, A, x_0)$). Hinweis: hier gilt es zunächst, die Situation graphisch korrekt darzustellen. Der entscheidende Schritt ist das Auffinden der korrekten Homotopie. Eine detailierte Skizze für die Homotopie reicht aus!