Übungen zur Vorlesung Topologie II

Blatt 3 J. Ebert
Abgabetermin: 6.11., in den Übungen.

Leseaufgabe 1. Wiederholen Sie die Definition eines CW-Komplexes. Was ist ein Unterkomplex?

Frageaufgabe 2. Formulieren Sie drei sinnvolle Fragen zum Inhalt der Vorlesung.

Aufgabe 3. Es sei $f : (X, A, x_0) \to (Y, B, y_0)$ eine Abbildung punktierter Raumpaare; mit $f|_A : A \to B$ sei die Einschränkung bezeichnet. Zeigen Sie: Falls f n-zusammenhängend ist und $f|_A$ $(n-1)$-zusammenhängend ist, so ist $f_* : \pi_k(X, A, x_0) \to \pi_k(Y, B, y_0)$ surjektiv wenn $k \leq n$ und bijektiv wenn $k \leq n-1$. Hinweis: auf die Abbildung $\pi_1(X, A, x_0) \to \pi_1(Y, B, y_0)$ lässt sich das 5-Lemma nicht anwenden. Hierfür ist ein separates (geometrisches?) Argument nötig.

Aufgabe 4. Für welche n ist $\mathbb{RP}^n$ ein einfacher Raum (d.h., die Wirkung von $\pi_1(\mathbb{RP}^n)$ auf den Homotopiegruppen $\pi_n(\mathbb{RP}^n)$ ist trivial)?

Aufgabe 5. Es sei (X, μ, e) ein H-Raum. Zeigen Sie, dass die Operation von $\pi_1(X, e)$ auf $\pi_n(X, e)$ trivial ist.

Aufgabe 6. Sei X ein Raum. Wir betrachten $\pi_n(X, x_0)$ als Menge $[(S^n, *), (X, x_0)]$ der punktierten Homotopieklassen. Sei $[S^n, X]$ die Menge der freien Homotopieklassen von Abbildungen $S^n \to X$ und es sei $\Phi : \pi_n(X, x_0) \to [S^n, X]$ die "Vergiß-Abbildung". Zeigen Sie:

(1) Ist $\gamma \in \pi_1(X, x_0)$ und $\alpha \in \pi_n(X, x_0)$, so gilt $\Phi(\gamma \cdot \alpha) = \Phi(\alpha)$.
(2) Falls $\alpha, \beta \in \pi_n(X, x_0)$ zwei Elemente mit $\Phi(\alpha) = \Phi(\beta)$ sind, so gibt es $\gamma \in \pi_1(X, x_0)$ mit $\beta = \gamma \cdot \alpha$.
(3) Falls X 0-zusammenhängend ist, so ist Φ surjektiv.

Hinweis: Teil 1 ist im wesentlichen in der Vorlesung behandelt worden. Teil 2 wird vielleicht klarer, wenn man bemerkt, dass für $f : S^n \to X$ die Gleichung $[f] = f_*[\mathrm{id}_{S^n}] \in \pi_n(X, f(*))$ besteht. Teil 3 involviert eine neue Idee. Die Inklsion $* \to S^n$ hat nämlich die *Homotopiefortsetzungseigenschaft*, das heißt, ist $f : S^n \to X$ eine Abbildung und $c : [0,1] \to X$ ein Weg mit $f(*) = c(0)$, so gibt es eine Homotopie $F : [0,1] \times S^n \to X$ mit $F(0, x) = f(x)$ und $F(t, *) = c(t)$ für alle $x \in S^n$ und $t \in [0,1]$. Diese Eigenschaft wird später ausführlich diskutiert werden und sollte hier einfach als Tatsache benutzt werden. Diese Aufgabe lässt sich zusammenfassen: ist X 0-zusammenhängend, so induziert Φ eine Bijektion

$$\pi_n(X, x_0)/\pi_1(X, x_0) \to [S^n, X]$$

von der Menge der Bahnen der π_1-Wirkung auf π_n zu der Menge der freien Homotopieklassen.