Übungen zur Vorlesung Topologie II

Blatt 2 J. Ebert

Abgabetermin: 30.10., in den Übungen.

Der Satz von Hurewicz ist eines der Hauptziele dieser Vorlesung. Um in den Übungen interessante Beispiele behandeln zu können, werden wir ihn bereits jetzt voraussetzen.

Satz 1 (Satz von Hurewicz)**.** *Sei $n \geq 2$ und $(X, A, *)$ ein punktiertes Raumpaar. Es sei angenommen, dass A 1-zusammenhängend ist und die Inklusion $A \to X$ $(n-1)$-zusammenhängend. Unter diesen Voraussetzungen ist der Hurewicz-Homomorphismus*

$$\mathrm{hur} : \pi_k(X, A, *) \to H_k(X, A; \mathbb{Z})$$

ein Isomorphismus für $k \leq n$ und surjektiv für $k = n+1$. Insbesondere gilt für einen $(n-1)$-zusammenhängenden Raum X:

$$H_k(X) = 0 \ (1 \leq k \leq n-1); \ H_n(X) \cong \pi_n(X, *).$$

Leseaufgabe 1. Lesen Sie über den Satz von Seifert und Van Kampen, in den Standardreferenzen dieser Vorlesung.

Frageaufgabe 2. Formulieren Sie drei sinnvolle Fragen zum Inhalt der Vorlesung.

Aufgabe 3. Es sei $f : X \to Y$ eine stetige Abbildung und $x_0 \in X$, $y_0 := f(x_0)$. Zeigen Sie, dass folgende Bedingungen äquivalent sind:

(1) $\pi_n(f; X_0) = 0$.

(2) Sind stetige $g : (S^{n-1}, *) \to (X, x_0)$ und $h : D^n \to Y$ gegeben, so dass

$$\begin{tikzcd} S^{n-1} \arrow[r, "g"] \arrow[d] & X \arrow[d, "f"] \\ D^n \arrow[r, "h"] & Y \end{tikzcd}$$

kommutiert, so existiert $k : D^n \to X$ mit $k|_{S^{n-1}} = g$ und eine Homotopie $h \sim f \circ k$ relativ zu S^{n-1} (m.a.W.: die Homotopie ist konstant auf S^{n-1}).

Hinweise: diese Aufgabe ist fundamental für viele spätere Überlegungen. Bei der Implikation $2 \Rightarrow 1$ empfielt es sich, separat zu zeigen, dass $f_* : \pi_n(X, x_0) \to \pi_n(Y, y_0)$ surjektiv ist und $\pi_{n-1}(X, x_0) \to \pi_{n-1}(Y, y_0)$ injektiv ist und die lange exakte Homotopiesequenz des Paares (Z_f, X) zu verwenden. Der Fall $n = 1$ verlangt eine gesonderte Betrachtung.

Für die Implikation $1 \Rightarrow 2$: aus dem gegebenen Diagramm konstruiere man die Abbildung $a : D^n \to Z_f$,

$$a(x) := \begin{cases} (2(1 - \|x\|, g(\frac{x}{\|x\|})) & \|x\| \geq \frac{1}{2} \\ h(2x) & \|x\| \leq \frac{1}{2} \end{cases}$$

und betrachte die Homotopieklasse $[a] \in \pi_n(Z_f, X, x_0)$.

Aufgabe 4. Sei $X = S^1 \vee S^2$. Seien $p \in S^1$ und $q \in S^2$ vom Grundpunkt verschieden. Skizzieren Sie die universelle Überlagerung von X und berechnen Sie $\pi_i(X)$ für $i \leq 2$. Berechnen Sie ferner die relativen Homotopiegruppen $\pi_i(X, S^2)$ und $\pi_i(X, S^1)$ für $i \leq 2$ sowie $\pi_i(X - p, S^1 - p)$ und $\pi_i(X - q, S^2 - q)$ (wieder $i \leq 2$). Zeigen Sie, dass ein Analogon des Ausschneidungssatzes für Homotopiegruppen falsch ist.

Aufgabe 5. Sei $X = \mathbb{RP}^2 \vee S^2$. Skizzieren Sie die universelle Überlagerung von X und berechnen Sie $\pi_i(X)$ für $i \leq 2$.

Mathematisches Institut, Universität Münster, Einsteinstrasse 62, 48149 Münster, Bundesrepublik Deutschland