Übungen zur Vorlesung Topologie II

Blatt 11 J. Ebert

Abgabetermin: 15.1., in den Übungen.

Leseaufgabe 1. Lesen Sie die Seiten 190–204 in Hatcher's Buch (Einführung in die Kohomologietheorie).

Frageaufgabe 2. Formulieren Sie drei sinnvolle Fragen zum Inhalt der Vorlesung.

Aufgabe 3. Wir betrachten S^1 als Teilraum $S^1 \subset S^1 \times S^2$, durch die Inklusion $x \mapsto (x, *)$. Das Raumpaar $(X, A) = (S^1 \times S^2, S^1)$ ist 1-zusammenhängend, und $\pi_1(A) \to \pi_1(X)$ ein Isomorphismus. Zeigen Sie, dass der relative Hurewicz-Homomorphismus $\pi_3(X, A) \to H_3(X, A; \mathbb{Z})$ nicht surjektiv ist.

Aufgabe 4. Es sei X ein zusammenhängender Raum mit $\pi_i(X) = 0$ für $i = 2, \ldots, n-1$. Durch Ankleben von Zellen in Dimension $\geq n+1$ erhalten wir einen Raum Y mit $\pi_n(Y) = 0$ für alle $n \geq 2$ und eine n-zusammenhängende Abbildung $f : X \to Y$. Zeigen Sie, dass die Sequenz

$$\pi_n(X) \xrightarrow{\text{hur}} H_n(X) \xrightarrow{f_*} H_n(Y) \to 0$$

exakt ist.

Aufgabe 5. Es sei Y ein zusammenhängender punktierter CW-Komplex mit Fundamentalgruppe G und $f : S^n \to Y$ sei punktiert, $n \geq 2$. Sei $X = Y \cup_f D^{n+1}$ (d.h. X entsteht aus Y durch Anheften einer $(n+1)$-Zelle). Zeigen Sie:

(1) Die charakteristische Abbildung $(D^{n+1}, S^n) \to (X, Y)$ der angehefteten Zelle bildet eine G-Basis der relativen Homotopiegruppe $\pi_{n+1}(X, Y)$.
(2) $\pi_n(Y) \to \pi_n(X)$ kann mit der Quotientenabbildung $\pi_n(Y) \to \pi_n(Y)/\langle f \rangle$ identifiziert werden, wobei $\langle f \rangle$ der von f erzeugte G-Untermodul ist.