Übungen zur Vorlesung Topologie II

Blatt 10 J. Ebert

Abgabetermin: 8.1., in den Übungen.

Frageaufgabe 1. Formulieren Sie drei sinnvolle Fragen zum Inhalt der Vorlesung.

Aufgabe 2. Es sei X ein Raum. Zeigen Sie:

(1) Sei $a \in H_k(X;\mathbb{Z})$. Dann gibt es einen endlichen CW-Komplex K der Dimension k, eine Abbildung $f : K \to X$ und $b \in H_k(K;\mathbb{Z})$ mit $f_*(b) = a$.

(2) Sei K^k ein endlicher CW-Komplex, $b \in H_k(K;\mathbb{Z})$ und $f : K \to X$ eine Abbildung mit $f_*(b) = 0$. Dann gibt es ein endliches CW-Paar (L, K), $\dim(L) \leq k + 1$, und eine Fortsetzung $g : L \to X$ von f, so dass $j_*(b) = 0 \in H_k(L;\mathbb{Z})$ gilt, wobei $j : K \to L$ die Inklusion sei.

Aufgabe 3. Sei (X, x_0) ein punktierter Raum. Der *Schleifenraum* $\Omega X = \Omega_{x_0} X$ ist der Raum aller geschlossenen Wege in X mit Grundpunkt x_0, also $\Omega X := \{f \in X^I | f(0) = f(1) = x_0\}$. Wir statten $\Omega X \subset X^I$ mit der Teilraumtopologie aus, wobei X^I die kompakt-offene Topologie trage. Man definiere

$$\mu : \Omega X \times \Omega X \to \Omega X;\ \mu(f, g)(t) := \begin{cases} f(2t) & t \in [0, \frac{1}{2}], \\ f(2t-1) & t \in [\frac{1}{2}, 1] \end{cases}$$

(Komposition von Schleifen). Als Grundpunkt diene der konstante Weg u bei x_0. Zeigen Sie, dass ΩX! ein H-Raum ist. Hinweis: um die Stetigkeit von μ nachzuweisen, muss man sich im letzten Abschnitt von Hatcher's Buch umsehen (Leseaufgabe auf Blatt 9). Äquivalent dazu ist es, die Stetigkeit von $I \times \Omega X \times \Omega X \to X$, $(t, f, g) \mapsto \mu(f, g)(t)$ nachzuweisen, und dafür ist es sinnvoll, I in zwei Teile zu teilen.

Aufgabe 4. Konstruieren Sie einen Isomorphismus

$$\theta : \pi_n(\Omega X, u) \cong \pi_{n+1}(X, x_0).$$

Aufgabe 5. Es sei (X, x_0) ein punktierter Raum. Die unreduzierte Einhängung ist bekanntlich $SX = CX/(X \times \{0\})$. Wir definieren die *reduzierte Einhängung* als Quotienten

$$\Sigma X := SX/(\{x_0\} \times I)$$

mit Quotientenabbildung $q : SX \to \Sigma X$. Als Grundpunkt in Σ diene der Punkt $[\{x_0\} \times I]$. Nun betrachte die tautologische Abbildung $\ell : X \to \Omega\Sigma X$, $\ell(x) = (t \mapsto [x, t])$. Diese ist punktiert, wenn man als Grundpunkt im Schleifenraum den konstanten Weg nimmt. Zeigen Sie, dass das Diagram

$$\begin{tikzcd}
\pi_n(X, x_0) \arrow[r, "\ell_*"] \arrow[d, "\mathrm{susp}"] & \pi_n(\Omega\Sigma X \arrow[d, "\theta"] \\
\pi_{n+1}(SX, *) \arrow[r, "q_*"] & \pi_{n+1}(\Sigma X)
\end{tikzcd}$$

zumindest bis auf Vorzeichen kommutiert. Es ist eine Tatsache, dass, wenn (X, x_0) wohlpunktiert ist, q eine Homotopieäquivalenz ist. Benutzen Sie dies und den Satz von Freudenthal, um die Konnektivität $\mathrm{conn}(\ell)$ zu berechnen.