Vorlesung Topologie I

Blatt 4 J. Ebert / L. Buggisch, G. Frenck

Abgabetermin: 17.11.2016 bis 12 Uhr

Leseaufgabe 1. Machen Sie sich mit dem Begriff der Quotiententopologie vertraut. Als Quelle können sie Wikipedia oder ein Topologie-Buch ihrer Wahl verwenden, zum Beispiel "Topologie" von Jänich.

Frageaufgabe 2 (2 Punkte pro Frage)**.** Formulieren Sie drei *sinnvolle* Fragen zum Inhalt der Vorlesung.

Aufgabe 3 (Homotopieäquivalenzen und Homöomorphismen, 10 Punkte)**.**

a) Zeigen Sie, dass die folgenden Inklusionen Homotopieäquivalenzen sind:

   i) $\{x \in \mathbb{C}\colon |x-k| = \frac{1}{2} \text{ für ein } 0 \leq k \leq n\} \hookrightarrow \mathbb{C} \setminus \{0, 1, \dots, n\}$.

   ii) $\mathbb{R}^n \setminus K \hookrightarrow \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ für $K \subset \mathbb{R}^n$ kompakt und sternförmig.

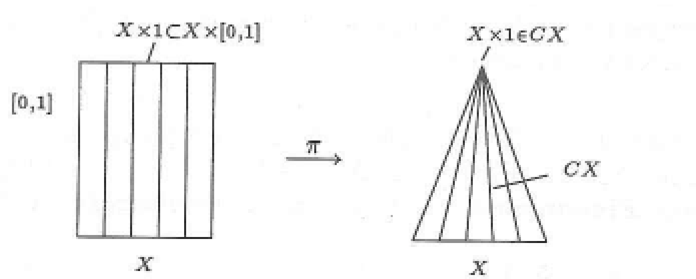
   iii) $S^{k-1} \hookrightarrow S^n \setminus S^{n-k}$. Hierbei ist $S^{k-1} = \{(x,0) \in \mathbb{R}^k \times \mathbb{R}^{n-k+1} | \|x\| = 1\}$, $S^{n-k} = \{(0,x) \in \mathbb{R}^k \times \mathbb{R}^{n-k+1} | \|x\| = 1\}$.

b) Es sei $D^n := \{x \in \mathbb{R}^{n+1} : \|x\| \leq 1\} \subset \mathbb{R}^{n+1}$ die Vollkugel mit Rand $\partial D^n = S^{n-1}$ Konstruieren sie einen Homöomorphismus

$$D^n / S^{n-1} \longrightarrow S^n.$$

Tip: Ist $f : X \to Y$ bijektiv, X kompakt und Y hausdorff, dann ist f^{-1} stetig.

Aufgabe 4 (Kegel und Einhängung, 10 Punkte)**.**



a) Sei X ein topologischer Raum. Wir definieren den Kegel CX von X durch

$$CX := X \times [0,1]/\sim$$

wobei $(x,0) \sim (y,0)$ für alle $x, y \in X$, siehe obige Abbildung.
Zeigen Sie: CX ist zusammenziehbar, wenn $X \neq \emptyset$.

b) Sei X ein topologischer Raum. Wir definieren die Einhängung SX von X durch

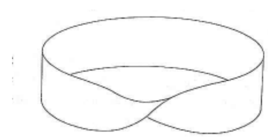
$$SX := X \times [0,1]/\sim$$

wobei $(x,0) \sim (y,0)$ und $(x,1) \sim (y,1)$ für alle $x, y \in X$.
Zeigen Sie: $S(S^n)$ ist homöomorph zu S^{n+1}.

Aufgabe 5 (Das Möbiusband, 10 Punkte)**.** In dieser Aufgabe soll die Homologie des Möbiusbandes berechnet werden. Wir definieren das Möbiusband wie folgt:

$$M := [0,1] \times [-1,1]/\sim$$

wobei $(0,t) \sim (1,-t)$.



Das Möbiusband

Sei nun $j\colon S^1 \cong [0,1]/\{0,1\} \to M, s \mapsto (s,0)$. Desweiteren sei $i\colon \partial M \to M$ die Inklusion des Randes $\partial M := [0,1] \times \{\pm 1\}/\sim$.

a) Zeigen Sie, dass j ist eine Homotopieäquivalenz ist.

b) Konstruieren Sie einen Homöomorphismus $h : S^1 \cong \partial M$, so dass das folgende Diagramm bis auf Homotopie kommutiert, d.h. $j \circ f_2 \sim i \circ h$:

$$\begin{tikzcd} \partial M \arrow[r, "i"] & M \\ S^1 \arrow[u, "h"] \arrow[r, "f_2"] & S^1 \arrow[u, "j"'] \end{tikzcd}$$

wobei f_2 wie in Aufgabe 5, Blatt 3, definiert ist.

c) Berechnen Sie nun $H_k(M)$, $H_k(\partial M)$ und $H_k(M, \partial M)$ für alle $k \in \mathbb{Z}$. Tip: Lange exakte Sequenz und Aufgabe 5, Blatt 3.

Viel Erfolg!

Quelle der Bilder: Jänich, K., Topologie, Springer-Verlag, korr. Nachdr., Berlin-Heidelberg-New York, Springer 2006.