Vorlesung Topologie I

Blatt 11

J. Ebert / L. Buggisch, G. Frenck

Abgabetermin: 19.01.2017 bis 12 Uhr

Frageaufgabe 1 (2 Punkte pro Frage)**.** Formulieren Sie drei *sinnvolle* Fragen zum Inhalt der Vorlesung.

Aufgabe 2 (n-Torus)**.** In dieser Aufgabe wird die Homologie des n-Torus $\mathbb{T}^n := S^1 \times \cdots \times S^1$ (n Faktoren) ausgerechnet. Seien $1 \in H_0(S^1;\mathbb{Z})$ und $u \in H_1(S^1;\mathbb{Z})$ Erzeuger. Zeigen Sie:

$$\{a_1 \otimes \cdots \otimes a_n \mid a_i = u \text{ für } k \text{ verschiedene } i \text{ und } a_i = 1 \text{ sonst}\}$$

ist eine Basis von $H_k(\mathbb{T}^n;\mathbb{Z})$. Insbesondere ist $H_k(\mathbb{T}^n;\mathbb{Z})$ eine freie abelsche Gruppe vom Rang $\binom{n}{k}$.

Aufgabe 3. Sei n gerade und m ungerade und betrachten sie die Räume $X := \mathbb{RP}^n \times S^m$ und $Y := S^n \times \mathbb{RP}^m$. Benutzen Sie den Satz von Künneth um zu zeigen: X und Y sind nicht homotopieäquivalent.

Aufgabe 4 (Transfer II)**.** Sei $f\colon X \to Y$ eine zweiblättrige Überlagerung und sei $T\colon X \to X$ die nicht triviale Decktransformation.

a) Zeigen Sie: $0 \to C_*(Y,\mathbb{F}_2) \xrightarrow{f^!} C_*(X,\mathbb{F}_2) \xrightarrow{f_*} C_*(Y,\mathbb{F}_2) \to 0$ ist eine kurze exakte Sequenz von Kettenkomplexen, wobei $f^!$ der Transfer von Blatt 10, Aufgabe 4 ist. Leiten Sie daraus eine lange exakte Sequenz

$$\ldots \to H_{p+1}(Y;\mathbb{F}_2) \xrightarrow{b} H_p(Y;\mathbb{F}_2) \xrightarrow{f^!} H_p(X;\mathbb{F}_2) \xrightarrow{f_*} H_p(Y;\mathbb{F}_2) \xrightarrow{b} \ldots$$

her.

b) Es sei Y ein zusammenhängender CW-Komplex mit $\pi_1(Y) = \mathbb{Z}/2$ und es sei $f : X \to Y$ die universelle Überlagerung (CW-Komplexe besitzen universelle Überlagerungen, darauf kommt es in dieser Aufgabe nicht an). Man nehme ferner an, dass X zusammenziehbar ist. Zeigen Sie, dass $H_p(Y;\mathbb{F}_2) \cong \mathbb{F}_2$ für jedes $p \geq 0$. Folgern Sie, dass Y nicht endlich-dimensional sein kann. Ein Beispiel dieser Situation ist $Y = \mathbb{RP}^\infty$.

Viel Erfolg!