Vorlesung Differentialtopologie

Blatt 1 J. Ebert / L. Buggisch

Abgabetermin: 3.5.2017

Allgemeine Bestimmungen

- Das Übungsblatt wird Mittwoch nach der Vorlesung auf die homepage hochgeladen, die Abgabe ist 14 Tage später, in der Übungsgruppe.
- Auf jedem Blatt gibt es eine "Frageaufgabe", deren Zweck darin besteht, dass Sie den Stoff der Vorlesung nacharbeiten.
- Gelegentlich gibt es "Leseaufgabe", die nicht bepunktet und nicht bewertet wird. Hier geht es darum, Definitionen aus den Vorlesungen "Einführung in die Geometrie, Topologie und Analysis" sowie einige algebraische Begriffe, die im Velauf der Vorlesung wichtig werden, zu wiederholen.
- Zu Beginn des Semesters werden wir ebenfalls "Präsenzaufgaben" stellen. Diese sind schwieriger als Präsenzaufgaben in den Grundvorlesungen und verlangen etwas Vorbereitung.

Präsenzaufgabe 1 (Konsequenzen des Rangsatzes)**.** Es seien M und N differenzierbare Mannigfaltigkeiten und $f : M \to N$ differenzierbar. Man zeige:

a) Wenn f injektiv ist und konstanten Rang hat, so ist f eine Immersion.

b) Wenn f eine Submersion ist, so ist f offen, also: $U \subset M$ offen, dann ist $f(U) \subset N$ offen.

c) Wenn f eine surjektive Submersion ist, so hat f "lokale Schnitte", d.h. zu jedem $p \in M$ gibt es eine offene Umgebung U von $q := f(p)$ in N und eine differenzierbare Abbildung $s : U \to M$ mit $f \circ s = \mathrm{id}_U$.

d) Sei f eine surjektive Submersion. Sei L eine weitere Mannigfaltigkeit und $h : N \to L$ eine Abbildung (von Mengen). Zeigen Sie, dass h genau dann differenzierbar ist, wenn $h \circ f$ differenzierbar ist. Hinweis: f ist surjektiv und offen, und das impliziert, dass h genau dann stetig ist, wenn $h \circ f$ stetig ist (warum?). Um die Differenzierbarkeit von h zu zeigen, verwende man lokale Schnitte.

e) Ist f bijektiv, so gilt $\dim(M) = \dim(N)$ (es sei denn, M ist leer).

f) Falls f bijektiv ist und eine Immersion (oder Submersion), so ist f ein Diffeomorphismus.

Frageaufgabe 2 (2 Punkte pro Frage)**.** Formulieren Sie drei *sinnvolle* Fragen zum Inhalt der Vorlesung.

Aufgabe 3 (Konstruktion von Abschneidefunktionen)**.** Die Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, welche durch

$$f(x) := \begin{cases} e^{-\frac{1}{x}} & x > 0 \\ 0 & x \leq 0 \end{cases}$$

gegeben ist, ist glatt (dies war eine Übungsaufgabe in Analysis I). Für $a < b$ setze man

$$g_{a,b}(x) := \frac{f(b-x)}{f(x-a) + f(b-x)},$$

und erhält eine glatte Funktion $g_{a,b} : \mathbb{R} \to [0,1]$, welche identisch 1 auf $(-\infty, a]$ und identisch 0 auf $[b, \infty)$ ist. Sei nun M eine Mannigfaltigkeit der Dimension n, $p \in M$ und $h : U \to h(U)$ eine Karte von M mit $h(p) = 0$. Ferner sei $\delta > 0$ so, dass $B_\delta(0) \subset h(U)$. Wir setzen $\varphi : M \to \mathbb{R}$ durch

$$\varphi(q) := \begin{cases} g_{\frac{\delta}{3}, \frac{2\delta}{3}}(\|h(q)\|), & q \in U \\ 0, & q \notin U. \end{cases}$$

Zeigen Sie, dass φ eine differenzierbare Funktion auf M ist. Hinweis: die Schwierigkeit besteht darin, die Stetigkeit von φ nachzuweisen. Hierfür muss ausgenutzt werden, dass M Hausdorffsch ist und dass $\overline{B_{\frac{2\delta}{3}}(0)}$ kompakt ist.

Aufgabe 4. Zeigen Sie: die Mengen

$$\{A \in \mathrm{Mat}_{m,n}(\mathbb{R}) |\, \ker(A) \neq 0\} \subset \mathrm{Mat}_{m,n}(\mathbb{R})$$

und (für jedes r)

$$\{A \in \mathrm{Mat}_{m,n}(\mathbb{R}) |\, \mathrm{rang}(A) \geq r\} \subset \mathrm{Mat}_{m,n}(\mathbb{R})$$

sind offen. Hinweis: A ist injektiv genau dann, wenn $A^T A$ invertierbar ist. Und $\mathrm{rang}(A) \geq r$ gilt genau dann, wenn ein $F \in \mathrm{Mat}_{n,r}(\mathbb{R})$ existiert, so dass AF injektiv ist.

Viel Erfolg