SEMINAR ZUR TOPOLOGIE I:

JOHANNES EBERT

(1) Zeit und Ort: Montag, 10-12 Uhr, SR 7

1. Grundlagen

In diesem ersten Teil des Seminars werden die grundlegenden Konstruktionen der Differentialtopologie eingeführt. Die meisten Resultate sind "anschaulich klar" und es geht gerade darum, wie geometrische Anschauung in mathematisch präzise Beweise übersetzt wird. Neben dem Satz von Sard ist der Existenz- und Eindeutigkeitssatz für gewöhnliche Differentialgleichungen das wichtigste Hilfsmittel.

Vortrag 1. (Whitney-Einbettungssatz, Georg Frenck) Es wird gezeigt, dass jede n-dimensionale Mannigfaltigkeit M eine Einbettung in den $\mathbb{R}^{2n+1}$ besitzt. Vorkenntnisse: Satz von Sard (wird in Vorlesung gezeigt). Literatur: [3], Ch II. 10.

Vortrag 2. (Dynamische Systeme) Dynamische Systeme (= gewöhnliche Differentialgleichungen) auf Mannigfaltigkeiten sind ein wichtiges Hilfsmittel, um Abbildungen zu konstruieren. Hier sollen Gleichungen 1. und 2. Ordnung diskutiert werden. Vorkenntnisse: Existenz-und Eindeutigkeitssatz über gewöhnliche Differentialgleichungen im $\mathbb{R}^n$, wie aus den Vorlesung "Mannigfaltigkeiten und Differentialgleichungen" oder "Gewöhnliche Differentialgleichungen". Literatur: [2], §7 und §11.

Vortrag 3. (Lineare Algebra für Vektorbündel, Steffen Tillmann) Hier soll es um grundlegende Konstruktionen für Vektorbündel gehen. Literatur: [2], §4.

Vortrag 4. (Tubenumgebungen) Es wird gezeigt, dass jede Untermannigfaltigkeit $N \subset M$ eine Umgebung U besitzt, so dass U ein Vektorbündel auf N ist. Vorkenntnisse: Die Ergebnisse aus Vortrag 2. Literatur: [2], §12.

Vortrag 5. (Transversalität, Gordan Fröhlich) Die wichtigste Idee der Differentialtopologie: Ist $N \subset M$ und $f : L \to M$ eine Abbildung, dann kann f ein klein wenig deformiert werden, so dass f "gut zu N liegt". Hier geht es darum,die Transversalitätsbedingung sorgfältig zu diskutieren und den Beweis durchzugehen, ist Inhalt des Vortrages. Vorkenntnisse: Einbettung, Tubenumgebungen, Satz von Sard. Literatur: [3], ch II.15 und [2], §14.

2. Numerische Invarianten

Vortrag 6. (Der Abbildungsgrad, Sonja Hannibal) Hier geht es um die geometrische Definition des Abbildungsgrades einer Abbildung $f : M^n \to N^n$, als Zahl der regulären Urbilder. Literatur: [7], ch. 5.1. Der Abbildungsgrad ist im Wesentlichen aus der Vorlesung bekannt, die Beziehung zur Kohomologie sollte in Erinnerung gerufen werden. Hauptergebnis des Vortrages ist der *Satz von Hopf* (Thm 1.10 loc.cit.): Zwei Abbildungen $f, g : S^n \to S^n$ sind genau dann homotop, wenn sie denselben Grad haben. Vorkenntnisse: Vorträge 1, 4, 5. Der eindimensionale Fall ist aus "Differentialformen und Mannigfaltigkeiten" bekannt. Als alternative Literatur bietet sich [10], S. 284 ff, an.

Vortrag 7. (Schnittzahlen und Eulerzahl, Sonja Hannibal) Die *Schnittzahl* zweier Untermannigfaltigkeiten $N^n, M^m \subset L^{n+m}$ ist, grob gesagt, die Zahl der Schnittpunkte, mit Vorzeichen. Hier wird bewiesen, dass die Schnittzahl homotopieinvariant ist. Als Spezialfall ergibt sich die *Eulerzahl* eines Vektorbündels $V \to M$ vom Rang m. Literatur: [7], ch 5.2. Das Hauptergebnis ist, dass eine Mannigfaltigkeit genau dann ein nichtverschwindendes Vektorfeld besitzt, wenn die Eulerzahl von TM Null ist.

Vortrag 8. (Die Pontrjagin-Konstruktion, Sonja Hannibal) Es handelt sich um eine Verallgemeinerung des Abbildungsgrades für Abbildungen $S^m \to S^n$ für $m > n$ und besagt, grob gesprochen, dass die Homotopieklasse einer solchen Abbildung durch das Urbild $f^{-1}(x)$ eindeutig bestimmt ist. Literatur: [9], 7, [3], II.16.

3. Beziehungen zur Kohomologie

Hinweis: die Literaturlage zu den nächsten Vorträge ist relativ schlecht; [3], ch. VI.11-12 ist zwar o.k., aber in der Sprache der singulären Theorie verfasst. [4] ist schwerer zugänglich, so dass letztendlich der Hinweis auf [1] notwendig ist. Die Vorträge sind auf jeden Fall anspruchsvoll und eine schriftliche Ausarbeitung ist eine vollwertige Bachelorarbeit.

Vortrag 9. (Poincaré-Dualität und Thomklassen) Es soll die Poincaré-Dualität wiederholt werden (wird in der Vorlesung behandelt). Des weiteren soll das Poincaré-Dual D_N einer Untermannigfaltigkeit $N^n \subset M^m$; eine Klasse in $H^{m-n}(M)$, diskutiert werden, [4], p.50-52. Darauf aufbauend die Thomklasse eines Vektorbündels $V \to M$. Hauptergebnis ist dass $D_{N_1} \wedge D_{N_2} = D_{N_1 \cap N_2}$ gilt. Literatur: [3], [4] und [1]. Vorkenntnisse: 7, die Ergebnisse aus 4 und 5 sowie ein guter Überblick.

Vortrag 10. (Die Eulerklasse) Die Eulerklasse $e(V)$ eines Vektorbündels $V \to M$ wird mit Hilfe der Thomklasse definiert. Es wird bewiesen, dass $\int_M e(V)$ gleich der Eulerzahl aus Vortrag 7 ist. Ferner wird gezeigt, dass die Eulerzahl des Tangentialbündels gleich der Euler-Charakteristik $\chi(M) = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k dim H^k(M)$ ist. Vorkenntnisse: Vortrag 9.

Vortrag 11. (Der Lefschetzsche Fixpunktsatz) Mit ähnlichen Ideen wie in den letzten Vorträgen wird eine Formel für die Zahl der Fixpunkte einer Abbildung $f : M \to M$ hergeleitet. Als Anwendung bietet sich der Satz von Hopf-Samelson ([3], Korollar VI.12.15) an, welcher eine weitreichende Verallgemeinerung des Jordan-Normalform für beliebige kompakte Liegruppen ist.

Literatur

[1] J. Ebert: *Private communication*
[2] Bröcker, Jänich: *Einführung in die Differentialtopologie*
[3] G. Bredon: *Topology and Geometry*
[4] R. Bott, L. Tu: *Differential forms in algebraic topology*
[5] Greub, Halperin, Vanstone: *Connections, curvature and cohomology, Volume II*
[6] S. Morita: *Geometry of differential forms*
[7] M. Hirsch: *Differential Topology*
[8] I. Madsen, J. Tornehave: *From calculus to cohomology*
[9] Milnor: *Topology from the differentiable viewpoint*
[10] tom Dieck: *Topologie*, 2. Auflage.

Mathematisches Institut, Einsteinstrasse 62, 48149 Münster
E-mail address: johannes.ebert@uni-muenster.de