§5 Haar-Maß auf profin. Gr.

Das Haarmaß μ ist ein translat. inv. Maß auf kp. Gr. mit $\mu(G) = 1$, d.h. μ ist ein Wahrsch.keitsmaß

Def 5.1 (i) Ist $A \subseteq \mathcal{P}(X)$, dann ist die von A erz. σ-Alg. die kleinste Teilm. $A' \subseteq \mathcal{P}(X)$ mit $A \subseteq A'$ und A' ist abg. unter Kompl. und abz. Vereinig.

(ii) Ist G profinit, dann ist die Borel-Körper $\mathcal{B}(G)$ von G die von allen abg. (= cp) Mengen erz. σ-Alg.

Sei $\mu: \mathcal{B} \to \mathbb{R}$ ein Fkt mit

(ia) $0 \le \mu(B) \le 1$ für alle $B \in \mathcal{B}$

(ib) $\mu(\emptyset) = 0$, $\mu(G) = 1$

(ic) Sind B_i, $i < \omega$, p.w. disj. Borel-Mengen, dann ist $\mu(\bigcup B_i) = \sum \mu(B_i)$ (σ-additiv).

(id) Ist $B \in \mathcal{B}$, $g \in G$, dann ist $\mu(gB) = \mu(Bg) = \mu(B)$ (translat. inv.)

(ie) Fü $B \in \mathcal{B}$, $\varepsilon > 0$, ex $U \subseteq_o G$, $C \subseteq_c G$ mit $C \subseteq B \subseteq U$ und $\mu(U \setminus C) < \varepsilon$ (regulär)

Bem: Aus Bed (ia) - (ic) folgt unmittelbar

(2a) Sind $A \subseteq B$ Borel, dann ist $\mu(B \setminus A) = \mu(B) - \mu(A)$, insbes. $\mu(G \setminus A) = 1 - \mu(A)$

(2b) Sind B_i, $i < \omega$, Borel, dann ist $\mu(\bigcup B_i) \le \sum \mu(B_i)$ (setze $B_n' = B_n \setminus \bigcup_{i=1}^{n-1} B_i$, benutze (ic))

(2c) Sind B_i, $i < \omega$, Borel mit $\mu(B_i) = 0$, dann ist $\mu(\bigcup B_i) = 0$ (nach 2b)

(2d) Sind B_i, $i<\omega$, Borel mit $\mu(B_i)=1$, dann ist $\mu(\bigcap B_i)=1$ (nach 2a, 2c).

(2e) Sind $A_i \subseteq A_{i+1}$, $i<\omega$, Borel, dann ist $\mu(\bigcup A_i) = \lim_{i\to\infty} \mu(A_i)$ (nach 1c)

(2f) Sind $A_i \supseteq A_{i+1}$, $i<\omega$, Borel, dann ist $\mu(\bigcap A_i) = \lim_{i\to\infty} \mu(A_i)$ (Komplem. betrachten und 2a, 2e)

(2g) Ist $|G:H|=n$, $H \leq_o G$, dann ist $\mu(H)=\frac{1}{n}$. (aus 1c, 1d).

Lemma 5.2 (i) Ist $H \leq_c G$, dann ist $\mu(H)=\frac{1}{|G:H|}$.

(ii) Ist $N \trianglelefteq_o G$, $\bar{A} \subseteq G/N$, $A = \{g\in G \mid gN \in \bar{A}\}$, dann ist $\mu(A) = \frac{|\bar{A}|}{|G:N|}$

(iii) Ist $\emptyset \neq U \subseteq_o G$, dann ist $\mu(U)>0$.

Bew: (i) Klar, falls $|G:H|<\infty$. Falls $|G:H|$ unendl. dann ist $H = \bigcap_{i<\omega} H_i$, $H_i \supseteq H_{i+1}$ offen.

Also $\mu(H) \leq \lim \frac{1}{|G:H_i|} = 0$.

(ii) trivial

(iii) sei $H \leq_o G$ mit $U \supseteq gH$. Dann ist

$$\mu(U) \geq \mu(gH) = \mu(H) = \frac{1}{|G:H|} > 0.$$

Def 5.3 $A \subseteq G$ heißt Nullmenge, wenn es $B \in \mathcal{B}(G)$ mit $A \subseteq B$ gibt mit $\mu(B)=0$.

Sei $\hat{\mathcal{B}}_\mu(G)$ $(=\hat{\mathcal{B}})$ die σ-Algebra, die von $\mathcal{B}$ und den Nullm. erz. wird. Dann ist jedes $\hat{B} \in \hat{\mathcal{B}}$ von der Form $\hat{B} = B_0 \cup B'$ mit $B' \in \mathcal{B}$, B_0 Nullm.

Setze $\hat{\mu}: \hat{\mathcal{B}} \to \mathbb{R}$, $\mu(\hat{B}) = \mu(B')$.

Dann erfüllt $\hat{\mu}$ immer noch (1) und (2) und zusätzl.

(3a) $\hat{\mathcal{B}}$ enthält alle Nullm. bzgl $(\hat{\mu}, \hat{\mathcal{B}})$ ($\hat{\mu}$ ist vollst.)

(3b) Für alle $B \in \hat{\mathcal{B}}$ ex $B_1, B_2 \in \mathcal{B}$ mit $B_1 \subseteq B \subseteq B_2$ und $\mu(B_2 \setminus B_1) = 0$. (Wähle nach 1e $B_{1,n} \subseteq B \subseteq B_{2,n}$ mit $\mu(B_{2,n} \setminus B_{1,n}) < \frac{1}{n}$, $B_{1,n} \subseteq B_{1,n+1}$, $B_{2,n+1} \subseteq B_{2,n}$.

Wir zeigen, dass $\hat{\mu}$ eind. bestimmt ist:

Prop 5.4 Sei $\mathcal{B}_0$ die bool. Alg. der clopen Mengen in G und $\mathcal{B}_1$ die von $\mathcal{B}_0$ erz. σ-Alg. Dann gilt:

(i) Für $U \in \hat{\mathcal{B}}_\mu$ ex. $A, B \in \mathcal{B}_1$ mit $A \subseteq U \subseteq B$ und $\mu(B \setminus A) = 0$.

(ii) Sind $\mu, \nu: \mathcal{B} \to \mathbb{R}$ mit 1a) – d), dann ist $(\hat{\mathcal{B}}_\mu, \hat{\mu}) = (\hat{\mathcal{B}}_\nu, \hat{\nu})$.

Kor 5.5. Auf einer p-adisch. Gr. ist das Haarmaß $\hat{\mu}$ eind. bestimmt.

Beweis von 5.4 (a) Nach 1e) genügt es offene Mengen U zu betrachten. Wir schreiben $U = \bigcup_{i \in I} x_i \Pi_i$ mit $\Pi_i \trianglelefteq_o G$, $x_i \in G$. Sei $\alpha = \sup\{\mu(\bigcup_{i \in J} x_i \Pi_i) \mid J \subseteq I \text{ abz.}\}$.

Sei $J_n \subseteq I$ abz. mit $\alpha - \mu(\bigcup_{i \in J_n} x_i \Pi_i) < \frac{1}{n}$. Sei $J = \bigcup J_n$.

Dann ist $A = \bigcup x_i \Pi_i \subseteq U$, $A \in \mathcal{B}_1$, $\mu(A) = \alpha$.

Setze $N = \bigcap \Pi_i \trianglelefteq_o G$. Dann G/N abz. Basis für Topol.

Sei $\pi: G \to G/N$ Proj. Dann sind die $\pi(x_i \Pi) = x_i \Pi_i N/N$ offen in G/N und $\bigcup \pi(x_i \Pi) = \pi(U)$. Dann ex. eine abz. Teilm $K \subseteq J$ mit $\pi(U) = \bigcup_K \pi(x_k \Pi_k)$. Es ist $\pi^{-1}(\pi(A)) = A$ und $\pi(U \setminus A) = \pi(U) \setminus \pi(A)$. Also

$$H \setminus A \subseteq \pi^{-1}(\pi(H \setminus A)) = \bigcup_K (x_k \Pi_k N \setminus A) =: B_0$$

Dann ist $B_0 \in \mathcal{B}_1$.

Genügt z.z: $\mu(B_0) = 0$. Dann ist $B = A \cup B_0 \in \mathcal{B}_1$ und $\mu(B \setminus A) = 0$. Genügt $\mu(x_k \Pi_k N \setminus A) = 0$ für $k \in K$.

Ang. es. ex $k \in K$ mit $\mu(x_k \Pi_k N \setminus A) > 0$.

Es ist $N = \overset{r}{\underset{\rho=1}{\cup}} (N \cap \Pi_k) n_\rho$. Dann ist $x_k \Pi_k N \setminus A = \overset{r}{\underset{\rho=1}{\cup}} (x_k \Pi_k n_\rho \setminus A)$

d.h. es ex ρ mit $\mu(x_k \Pi_k n_\rho \setminus A) > 0$.

Es ist $A n_\rho = A$, denn $n_\rho \in \Pi_j$ für alle $j \in J$.

Daher ist $\mu(x_k \Pi_k \setminus A) = \mu((x_k \Pi_k \setminus A) n_\rho) = \mu(x_k \Pi_k n_\rho \setminus A) > 0$

Es folgt $\mu(\bigcup_{i \in I} x_i \Pi_i \cup x_k \Pi_k) = \mu(A) + \mu(x_k \Pi_k \setminus A) > \alpha$ ↯

(h) Sei $\mathcal{B}_2 = \{B \in \mathcal{B} \mid \nu(B) = \mu(B)\}$. Dann ist $H \in \mathcal{B}_2$ für alle $H \leq_o G$. Daher ist $\overset{r}{\underset{i=1}{\cup}} g_i N \in \mathcal{B}_2$ für alle $N \trianglelefteq_o G$ d.h. $\mathcal{B}_0 \subseteq \mathcal{B}_2$. Nach 2e, 2f sind μ, ν monoton und daher ist $\mathcal{B}_1 \subseteq \mathcal{B}_2$.

Ist $C \subseteq_c G$, dann bekommen wir aus dem Beweis von

a) eine Menge $D \in \mathcal{B}_1$ mit $C \subseteq D$ und $\mu(C) = \mu(D) = \nu(D)$ nach obig. Argument. ~~Aus Symm. gt. ist~~ Daher ist $\nu(C) \leq \nu(D) = \mu(C)$ und aus Symm.gt. $\mu(C) \leq \nu(C)$, d.h. $C \in \mathcal{B}_2$. Insbes. also $\mathcal{B}_2 = \mathcal{B}$ und $\mu(B) = 0$ gdw $\nu(B) = 0$ für alle $B \in \mathcal{B}$, d.h. $A \subseteq G$ ist Nullm. bzgl. μ gdw bzgl. ν. und daher $\hat{\mathcal{B}}_\mu = \hat{\mathcal{B}}_\nu$, $\hat{\mu} = \hat{\nu}$.

Def 5.5 Mengen in $\hat{\mathcal{B}}$ heißen messbar.

Bsp: (i) G endl. Gp. mit diskr. Topol. Dann ist $\mu(B) = \frac{|B|}{|G|}$ für alle $B \in G$.

(ii) Unendl. profin. Gp. haben nicht-messb. Teilm.