Thm 4.20 Let G be unif. powerful pro-p, $d = \dim(G)$, $\overline{\langle a_1, \dots a_d \rangle} = G$. Then $(G,+)$ is a free $\mathbb{Z}_p$-mod. with basis $\{a_1, \dots a_d\}$.

Pf By 4.18 $\langle a_1, \dots a_d \rangle = (G,+)$ and $d(G,+) = d$. By Lemma 4.9 applied to $(G,+)$ every elt has a unique expression $a = \lambda_1 a_1 + \dots + \lambda_d a_d$, $\lambda_i \in \mathbb{Z}_p$.

Cor 4.21 Let G be a unif. powerful pro-p, $d = \dim(G)$. Then the action of $\mathrm{Aut}(G)$ on G is $\mathbb{Z}_p$-lin. wrt. $\mathbb{Z}_p$-module str. on $(G,+)$. Hence $\mathrm{Aut}(G)$ can be identif. with subgp of $GL_d(\mathbb{Z}_p)$.

Pf: Let $\kappa \in \mathrm{Aut}(G)$. Then κ is cont. by Serre's Thm., κ respects taking p^nth roots (by uniqueness of roots), so κ respects $+_n$ for each n and by continuity $+$. By contin. it also respects $\mathbb{Z}_p$-action since they are limits of powers in G.

Cor 4.22 G pro-p of fin rk, $d = \dim G$. Then there is an ex. seq.

$$1 \to \mathbb{Z}_p^e \to G \to GL_d(\mathbb{Z}_p) \times F$$

for some $e \le d$, finite p-gp F.

Pf: Let $H \trianglelefteq_o G$ unif. powerful, $A = Z(H)$. Then A is closed in H, so A is tors. free ab. pro-p gp of rk $\le \mathrm{rk}(H) = d$. Then $A \cong \mathbb{Z}_p^e$ for some $e \le d$. Now for $g \in G$, let $\kappa_g \in \mathrm{Aut}(H)$ be conjug. by g. $\Theta: G \to \mathrm{Aut}(H) \times G/H$, $g \mapsto (\kappa_g, gH)$. Then $\ker \Theta = A$.

Since $\mathrm{Aut}(H) \hookrightarrow GL_d(\mathbb{Z}_p)$ by 4.20 the result follows.

Thm 4.23 Let G be fin. gen. powerful pro-p, T the set of torsion elts. Then T is char. subgp of G and G/T is unif.

Need

Lemma 4.24 Let G be a unif. pro-p gp, $\Gamma_i = \Gamma(G_i)$ as before. Then Γ_2 is tors. free if p is odd, Γ_3 is tors. fr. if $p=2$.

Pf: The map $x \mapsto x^{p^{i+1}}$ induces $G/G_2 \to G_i/G_{i+1}$

Hence Γ_2 induces the triv. act. on G_i/G_{i+1} for each i.

So Then Γ_2 is pro-p by Prop 4.4.

Hence suffices to show that Γ_2 has no elt. of order p. (restrict to p odd)

Suppose $\gamma \in \Gamma_2$ with $\gamma^p = 1$ and $[G, \gamma] \le G_i$ for some $i \ge 2$.

Let $g \in G$. Then

$$1 = [g, \gamma^p] = [g,\gamma]^p [g,\gamma,\gamma^{p(p-1)/2}] \mod G_{i+2}$$
$$= [g,\gamma]^p \in G_{i+2}$$

Hence $[g,\gamma] \in G_{i+1}$. Since i was arbitr. $[g,\gamma] = 1 \ \forall g \in G$ so $\gamma = 1$.

Pf of 4.23 Let G be fin. gen. powerful, $G_m \le G$ unif.

Put $K = C_G(G_m)$. Then $Z(K) \ge G_m \cap K$, so $K/Z(K)$ is a fin. p-gp. Thus K is nilp. and elts of fin order in K form a subgp T. Then $T \trianglelefteq G$ and K/T is tors. free.

G/K acts faithfully on G_m by conjug. Since G is powerful, G_m p.c. G, so G/K acts triv. on $G_m/\Phi(G_m)$

Hence G/K is tors. free by 4.24

Then all torsion elts of G are in T. and thus G/T is uniform by Thm 4.20. Then $T \cap G_m = 1$, so T is fin. and powerful since $[T,T] \leq T \cap [G,G] \leq T \cap \overline{G^p} \leq T^p$.

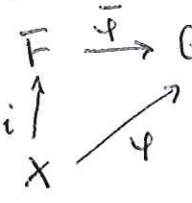
Prop: If G is a nilp. gp, then its tors. elts form a char subgp.

Pf: Suffices to show: if $x, y \in G$ are torsion, then $\langle x, y \rangle$ is fin. Now assume $G = \langle x, y \rangle$.
Then for every i, $G^{(i)}/G^{(i+1)}$ is torsion and finite:
Namely it is generated by $[x, g]$, $x \in G^{(i-1)}$, $g \in G$.
Now x is tors. mod $G^{(i)}$, so $x^n \in G^{(i)}$, and
$1 \equiv [x^n, g] \equiv [x, g]^n \bmod G^{(i+1)}$, so $[x, g]$ is torsion.
$G = G^0 \geq G' \geq \ldots G^{(n)} = 1$ shows that G is finite.

§5 Free Pro-$\mathcal{C}$ gps

Sei $\mathcal{C}$ eine Klasse endl. Gp. abg. unter Quot. und Subobj. Prod., $\mathcal{C} \neq \{1\}$.

Def 5.1 Ist X ein profin Raum, F eine pro-$\mathcal{C}$ Gp, $i: X \to F$ stetig mit $F = \overline{\langle i(X) \rangle}$, dann heißt (F, i) freie pro-$\mathcal{C}$ Gp auf X, wenn folg. univ. Eigensch. gilt



für jede stet. Abb. $\varphi: X \to G$ pro-$\mathcal{C}$ mit $\overline{\langle \varphi(X) \rangle} = G$ ex. ein $\bar{\varphi}: F \to G$, so dass das Diagramm kommutiert.

Bem: Es genügt, für endl. Gp. G zu testen.

Satz 5.2 Für jeden profin. Raum X ex. eine eind. freie pro-$\mathcal{C}$ Gp. $F_{\mathcal{C}}(X)$ auf X.

Bew: Eind. wie immer. Zur Existenz: Sei $D = F(X)$, die freie Gp. auf X, und

$$\mathcal{N} = \{ N \trianglelefteq D \mid D/N \in \mathcal{C},\ X \cap dN \text{ offen in } X \ \forall d \in D \}.$$

Dann ist $\mathcal{N} \neq \emptyset$ und filtriert. Setze $F_{\mathcal{C}}(X) = \varprojlim_{N \in \mathcal{N}} D/N$

Sei $i: X \to F_{\mathcal{C}}(N)$ die Einschr. des Einb. $D \to F_{\mathcal{C}}(X)$ auf X. Dann ist $F_{\mathcal{C}}(X) \to D/N$ stetig $\forall N \in \mathcal{N}$, also auch i.

Wir müssen die univ. Eigenschaft verifiz.

Sei $G \in \mathcal{C}$, $\varphi: X \to G$ stetig mit $G = \langle \varphi(X) \rangle$. Weil D eine (abstr.) freie Gp. ist, ex ein Gphom $\varphi_1: D \twoheadrightarrow G$, der φ fortsetzt, $K_1 = \ker \varphi_1 \in \mathcal{N}$. So erhalten wir stetigen

Homom $\bar{\varphi}: F_{\mathcal{C}}(X) \to D/K \to G$ und $\bar{\varphi} i = \varphi$.

~~Def 5.3 Der Rg von $F_{\mathcal{C}}(X)$ ist $|X|$~~

Bsp 5.4 (a) Die freie profin. (pro-endl.-nilp.) Gp vom Rg 1 ist $\hat{\mathbb{Z}}$.

(b) $\mathbb{Z}_p$ ist die freie pro-p Gp. vom Rg 1.

Um den Rang zu definieren brauchen wir

Def Für eine Menge X, profin. Gp. G sagen wir, das ~~Wir sagen~~, dass $\mu: X \to G$ gegen 1 konvergiert, wenn jedes $U \subseteq_o G$ fast alle $\mu(X)$ enthält.

Lemma 5.5 Es sind äquiv:

(i) $F_{\mathcal{C}}(X)$ ist freie pro-$\mathcal{C}$ Gp mit X gegen 1 konv.

(ii) Für alle $\mu: X \to G$ gegen 1 konv., G pro-$\mathcal{C}$, $\overline{\langle \mu(X) \rangle} = G$ ex eind. Homom. $\bar{\mu}: F_{\mathcal{C}}(X) \to G$.

Bew: einfach

Lemma 5.6 (i) Sei $F = F_{\mathcal{C}}(X)$ die freie pro-$\mathcal{C}$ Gp mit X gegen 1 konverg. Falls F auch freie pro-$\mathcal{C}$ Gr.