M. Hils
18.4.17

Seminar Stabile und NIP Körper

§1 Einführung in ω-stabile Theorien & Morleyrang

I ω-stabile Theorien + MR

II ω-stabile Gruppen

III Stabilisator-UG und generische Typen

ad I. Kontext: T vollst. $\mathcal{L}$-Theorie, $\kappa \gg \aleph_0$ Kard.zahl
$\mathcal{U} \models T$ κ-sat. und κ-stark homogen
Parammengen $A \subseteq \mathcal{U}$ sind von Kard $< \kappa$,
Modelle sind $\mathcal{M} \preccurlyeq \mathcal{U}$ mit $|M| < \kappa$.

Def: $\varphi(\bar{x})$ $\mathcal{L}_{\bar{u}}$-fml. Definiere per Induktion über $\alpha \in \mathrm{Ord}$ eine Relation $MR(\varphi) \geq \alpha$:

- $MR(\varphi) \geq 0 \iff \varphi$ konsistent
- $MR(\varphi) \geq \lambda \iff MR(\varphi) \geq \alpha \ \forall \alpha < \lambda$ (λ Limes)
- $MR(\varphi) \geq \beta + 1 \iff$ ex. $\chi_i(\bar{x})$, $i \in \mathbb{N}$ $\mathcal{L}_{\mathcal{U}}$-Fmln s.d.
  - $\mathcal{U} \models \chi_i \to \varphi$
  - $\chi_i \wedge \chi_j$ inkons. für $i \neq j$
  - $MR(\chi_i) \geq \beta \ \forall i$.

Bem: Falls $\beta < \alpha$, so gilt $MR(\varphi) \geq \alpha \Rightarrow MR(\varphi) \geq \beta$
Es gibt genau drei Fälle:
(1.) φ inkonsistent. Man setzt $MR(\varphi) = -\infty$
(2.) $MR(\varphi) \geq \alpha \ \forall \alpha \in \mathrm{Ord}$. Setze $MR(\varphi) = \infty$.
(3.) $\exists$ max $\alpha \in \mathrm{Ord}$ mit $MR(\varphi) \geq \alpha$. Setze $MR(\varphi) = \alpha$.
Wir sagen, dass φ einen MR besitzt, falls $MR(\varphi) < \infty$.

Lemma I.1.
(1.) $MR(\varphi) = \alpha < \infty$, $\beta < \alpha$, so ex. $\psi(\bar{x})$ mit $\mathcal{U} \models \psi(\bar{x}) \to \varphi(\bar{x})$ mit $MR(\psi) = \beta$

(2.) $MR(\varphi \vee \psi) = \max(MR(\varphi), MR(\psi))$

(3.) Falls $\mathfrak{U} \models \psi \to \varphi$, so gilt $MR(\psi) \leq MR(\varphi)$.

Also gilt: Falls es eine $\mathfrak{U}$-def-bare Injektion $f: \psi(\mathfrak{U}) \hookrightarrow \varphi(\mathfrak{U})$ gibt, so gilt $MR(\psi) \leq MR(\varphi)$.

Lemma I.2:

(1.) Sei $\psi(\bar{x}, \bar{y}) \in \mathcal{L}$, $\bar{a}, \bar{a}' \in \mathfrak{U}^{|\bar{y}|}$, $tp(\bar{a}) = tp(\bar{a}')$.
Dann gilt $MR(\psi(\bar{x}, \bar{a})) = MR(\psi(\bar{x}, \bar{a}'))$.
(Aut-Invarianz).

(2.) Ist $\varphi(\bar{x}) \in \mathcal{L}_M$, wobei $\mathfrak{M} \preccurlyeq \mathfrak{U}$ ω-saturiert. Dann kann $MR(\varphi)$ mithilfe von Fmln aus $\mathcal{L}_M$ beschrieben werden.

<u>Bew</u>: (1.) Ind über α.

(2.) Sei MR^M der Rang, den ich mit $\mathcal{L}_M$-Fmln erhalte. Offenbar gilt $MR^M \leq MR$

Z: $MR^M(\varphi) \geq MR(\varphi)$ Induktiv über α,
zeige $MR(\varphi) \geq \alpha \Rightarrow MR^M(\varphi) \geq \alpha$.

$\alpha = 0$ ✓ α Limes ✓

$\alpha = \beta + 1$. Finde $\chi_i = \chi_i(\bar{x}, \bar{b}_i)$ wie in der Def. $\varphi(\bar{x}) = \Phi(\bar{x}, \bar{a})$, $\bar{a} \in M$, $\chi_i, \Phi \in \mathcal{L}$.

M ω-sat. $\Rightarrow tp(\bar{b}_0, \bar{b}_1, \ldots / \bar{a})$ ist in M realisiert, etwa durch $\bar{b}_i'$. $\chi_i' = \chi_i(\bar{x}, \bar{b}_i') \in \mathcal{L}_M$.

(1.) $\Rightarrow MR(\chi_i') = MR(\chi_i) \geq \beta$

$\chi_i' \wedge \chi_j'$ inkons. und $\mathfrak{U} \models \chi_i' \to \varphi$ folgt, da $\bar{b} \equiv_a \bar{b}'$ ☒

Def: Sei $\alpha \in Ord \cup \{\infty\}$. Wir setzen $\varphi(\bar{x}) \sim_\alpha \psi(\bar{x})$, falls $MR(\varphi \triangle \psi) < \alpha$. $\sim_\alpha$ ist eine ÄR (ÜA).

$(\varphi \wedge \neg\psi) \vee (\neg\varphi \wedge \psi)$

$\varphi(\bar{x})$ heißt α-s.m. falls $MR(\varphi) = \alpha$ und f.a. ψ gilt $MR(\varphi \wedge \psi) < \alpha$ oder $MR(\varphi \wedge \neg\psi) < \alpha$.

Lemma & Definition I.3: $MR(\varphi) = \alpha < \infty$

(1.) Es gibt $\varphi_1, \dots, \varphi_n$ paarweise inkons. α-s.m. mit $\varphi \sim \varphi_1 \vee \dots \vee \varphi_n$.

(2.) Ist $\varphi \sim \psi_1 \vee \dots \vee \psi_m$ wie in (1.), so ist $m = n$ und es ex. $\sigma \in S_n$ mit $\varphi_i \sim_\alpha \psi_{\sigma(i)}$. Man nennt n den Morleygrad von φ, schreibe $MD(\varphi)$. Man schreibt $MRD(\varphi) = (\alpha, n)$.

Bem: · φ 1-s.m. $\Leftrightarrow$ φ s.m. $\Leftrightarrow$ $MRD(\varphi) = (1, 1)$

· φ alg. gdw. $MR(\varphi) \leq 0$.

Lemma I.4 (1.) Falls $MR(\psi) < MR(\varphi) < \infty$, so $MRD(\varphi \vee \psi) = MRD(\varphi)$.

(2.) Ist $\varphi \wedge \psi$ kons. und $MR(\varphi) = MR(\psi) < \infty$, so gilt $MD(\varphi \vee \psi) = MD(\varphi) + MD(\psi)$.

Def: T heißt t.t., falls jede Fml. MR besitzt.

· ω-stabil, falls $|S_1(A)| \leq \aleph_0$ $\forall A \subseteq \mathfrak{U}$, $|A| \leq \aleph_0$.

Satz I.5 (Vorlesung). L abz., so

T t.t. $\Leftrightarrow$ ω-stabil $\Leftrightarrow$ $MR(x = x) < \infty$.

Allg.: T t.t. $\Leftrightarrow$ jedes abz. Redukt von T ist ω-stabil.

Def: · $p \in S(A)$. Man setzt

· $MR(p) := \min\{MR(\varphi) \mid \varphi \in p\}$

· Ist $MR(p) < \infty$, so ist ~~Def(p)~~ $MD(p) = \min\{MD(\varphi) : \varphi \in p,\ MR(\varphi) = MR(p)\}$

Schreibe $MR(\bar{a}/A)$ für $MR(tp(\bar{a}/A))$. Dito für MD.

Prop I.6. $p \in S(A)$.

(1.) Ist $\alpha = MR(p) < \infty$ und $\varphi \in p$ mit $MRD(\varphi) = MRD(p)$, so ist $p = \{\psi(\bar{x}) \in \mathcal{L}_A \mid MR(\varphi \wedge \psi) = \alpha\}$. (*)

(2.) Umgekehrt ist φ wie oben eind. bestimmt, bis auf $\sim_\alpha$.

Prop I.7.: Sei $\varphi(\bar{x}) \in \mathcal{L}_A$ konsistent.

(1.) $MR(\varphi) = \max\{MR(p) : p \ni \varphi\}$ $\quad p \in S_{|\bar{x}|}(A)$.

(2.) Ist $MR(\varphi) = \alpha < \infty$, so gilt $MD(\varphi) = \sum_{\substack{p \in S(A) \\ MR(p) = MR(\varphi) \\ \varphi \in p}} MD(p)$

(3.) Ist $A \subseteq B$, $MR(p) < \infty$, $p \in S(A)$, so

$$MD(p) = \sum_{q \in S(B),\, q\restriction_A = p,\, MR(p) = MR(q)} MD(q).$$

Lemma I.8.: $\bar{b} \in acl(A\bar{a})$, so gilt $MR(\bar{b}/A) \leq MR(\bar{a}/A)$.

Kor. / Bsp. I.9. T s.m., so gilt $MR(\bar{a}/A) = algdim(\bar{a}/A)$
(= max. Länge eines Untertuples $a_{i_1}, \dots, a_{i_k}$ mit $a_{i_{j+1}} \notin acl(Aa_{i_1} \dots a_{i_j})$ $\forall j$).

Def: $MR(\varphi) < \infty$, $p \in S(A)$, $B \supseteq A$, so heißt $q \in S(B)$, $q\restriction_A = p$, nicht-gabelnde (alternativ: nicht-forkende) Fortsetzung von p, falls $MR(q) = MR(p)$

Kor. I.10 ($\Leftarrow$ I.7) $MR(q) < \infty$, so hat p mind. eine und $\leq MD(p)$-viele nicht gabelnde Fortsetzungen zu allen $B \supseteq dom(p)$.
p heißt stationär $\Leftrightarrow$ $MD(p) = 1$.

Kor. I.11. T t.t., $M \models T$ ω-sat., so sind alle Typen/M stationär.

<u>Bem</u>: (ohne Beweis) Dies gilt für alle Modelle!

Satz I.13 T t.t., $\varphi(\bar{x}) \in L_A$, $MR(\varphi) = \alpha < \infty$, $\psi(\bar{x}, \bar{y}) \in L$. Dann ist die folgende Menge A-def.:

$$D = \{ \bar{b} \in \mathcal{U}^{|\bar{y}|} : MR(\varphi \wedge \psi(\bar{x}, \bar{b})) = \alpha \}.$$

Bew: Eventuell später. Benutzt: T hat nicht OE und nicht-gabelnde Fortsetzungen sind "koerben".

Def: $A_0 \subseteq A$, $p \in S(A)$ heißt A_0-def.bar, falls es f.a. L-Fmln $\varphi(\bar{x}, \bar{y})$ eine L_{A_0}-Fml $d_p\varphi(\bar{y})$ gibt mit

(D) $\forall \bar{a} \in A^m : \varphi(\bar{x}, \bar{a}) \in p \Leftrightarrow \mathcal{U} \models d_p\varphi(\bar{a})$.

Man nennt $(d_p\varphi)_\varphi$ ein Def.schema von p.

Bem. I.15: $M \models T$, $p \in S(M)$ def. $/M$, $B \supseteq M$. Dann definiert $(d_p\varphi)_\varphi$ und (D) einen vollst. Typen $p\restriction_B$ über B.

Bew: Nur z: $p\restriction_B$ ist konsistent.

OE $M \subseteq B \subseteq N$. $B = N \succcurlyeq M$.

Prüfe: $p\restriction_N$ endl. erfüllt in N.

$(M \models \forall \bar{z}_1 \ldots \bar{z}_k \exists \bar{x} (\bigwedge d_p\varphi_i(\bar{z}_i) \to \bigwedge \varphi_i(\bar{x}, \bar{z}_i))$

$N \models \quad \ldots \quad \Rightarrow p\restriction_N$ endl. erf. in N) $\boxtimes$

Satz I.16. T t.t., dann ist jeder Typ $p \in S(A)$ über $A_0 \subseteq A$ endl. def.bar. Ist $A = M$ Modell, so definiert $(d_p\varphi)_\varphi$ die eind. bestimmte nicht-gabelnde Fortsetzung von p zu allen $B \supseteq M$.

Bew: Sei $\varphi(\bar{x}) \in p$ mit $MRD(\varphi) = MRD(p) = (\alpha, d)$. A_0 Param. von φ. $\psi(\bar{x}, \bar{y}) \in L$.

I.13 $\Rightarrow D = \{ \bar{b} \in \mathcal{U}^{|\bar{y}|} \mid MR(\varphi \wedge \psi(\bar{x}, \bar{b})) \geq \alpha \}$ ist A_0-def.bar, durch $\chi(y) \in L_{A_0}$. Setze $d_p\psi(\bar{y})$ $\chi(\bar{y})$."

Ist $A = M$, so enthält $p\restriction_B$ nur Fml/n von $MR \geq \alpha$. $\Rightarrow MR(p\restriction_B) = MR(p)$ ☒

Notation $\bar{a} \perp_A B \Leftrightarrow tp(\bar{a}/AB)$ gabelt nicht über A.

Satz I.17 (Symmetrie von $\perp$) T t.t., so $\bar{a} \perp_A \bar{b}$ $\Leftrightarrow \bar{b} \perp_A \bar{a}$.

(Bew. idee am Ende).

Andere Eigenschaften von $\perp$:

Monotonie + Transitivität:

$$\bar{a} \perp_A B_1 B_2 \Leftrightarrow \bar{a} \perp_A B_1 \ \& \ \bar{a} \perp_{AB_1} B_2$$

II ω-stabile Gruppen.

Kontext: $T = Th(G, \cdot, \dots)$ t.t., $(G, \cdot)$ Grp.

Bsp II.0: $K = K^{alg} \models ACF$, $G = Gl_n(K)$, $MR(G) = n^2$.

$(K, 0, +, \cdot)$

Prop II.1: Sei $H \leq G$ def.bare UG.

(1.) Ist $(G : H) < \infty$, so $MR(G) = MR(H)$ und $MD(G) = (G : H)\, MD(H)$.

(2.) Ist $(G : H) = \infty$, so $MR(H) < MR(G)$.

Bew: Alles folgt aus $MR(H) = MR(gH)$ $\forall g \in G$. ☒

Kor II.2 (DCC für def.bare UG) Jede absteigende Folge von Untergruppen von G wird stationär.

Bew: $H \lneq H'$, so $MRD(H) <_{lex} MRD(H')$.

OZ sind fundiert $\Rightarrow$ ex. keine unendl. abst. Folge ☒

Kor. II.3. Der Schnitt einer bel. Familie $(H_i)_{i \in I}$ def.barer Untergrp. von G ist gleich $\bigcap_{i \in I_0} H_i$ für ein $I_0 \subseteq I$ endl., also def.bar.

Bew: DCC.

Bsp: $A \subseteq G$ bel., so $Z_A := \{g \in G : ga = ag \ \forall a \in A\}$
$= \bigcap_{a \in A} Z_a = \bigcap_{i=1}^{n} Z_{a_i}$, somit def.bar.

Def: G heißt zshgd, falls G keine ~~endl.~~ echte def.bare Untergrp. von endl. Index besitzt.

Bsp. II.4: G divisibel ($\forall n \geq 1 \ \forall g \in G \ \exists h \in G : h^n = g$), so ist G zshgd (G hat gar keine UG von endl. Index)

Bem. II.5: G zshgd, $N \triangleleft G \Rightarrow G/N$ zshgd.

Prop II.6. G besitzt eine kleinste def.bare UG von endl. Index. Diese wird mit G° bezeichnet und Zusammenhangskomponente genannt. G° ist NT und $\emptyset$-def.bar.

<u>Bew</u>: Existenz folgt aus Kor II.3. Zudem gilt $\sigma(G^\circ) = G^\circ$. $\forall \sigma \in \mathrm{Aut}(\mathfrak{U})$ (allg. Tatsache). ☒

Bem. II.7: $G \cong G'$, so $(G : G^\circ) = (G' : G'^\circ)$, insbes. mit $G' \geq G$ gilt $G'^\circ = \varphi^\circ[G']$, wenn $G^\circ = \varphi^\circ[G]$.

III Stabilisator UG und generische Typen

Kontext wie eben.

G wirkt auf $S_1(G)$ via

$$G \times S_1(G) \to S_1(G)$$
$$(g, p) \mapsto \{\varphi(g \cdot x) : \varphi(x) \in p\}$$

Bem. III.1: Alternative Beschreibung von $G \ltimes S_1(G)$: Ist $a \models p$, so $g \cdot p = tp(g \cdot a / G)$.

Insbes. folgt $MR(g \cdot p) = MR(p)$.

Def: $p \in S_1(G)$. Die Stab-UG von p ist gegeben durch $Stab_p := \{ g \in G : g \cdot p = p \}$.

Prop III.2 ① $Stab_p$ ist def-bare UG von G.

② Sei $Stab_p(x)$ $\mathcal{L}_G$-fml, die $Stab_p$-definiert, und sei $G' \geq G$. Dann ist $Stab_{p'} = Stab_p(G')$, wobei $p' = p \restriction_{G'}$.

③ $MR(Stab_p) \leq MR(p)$.

Bew: Sei $\varphi(x) \in p$ mit $MRD(\varphi) = MRD(p) = (\alpha, 1)$.

Dann gilt $g \in Stab_p \Leftrightarrow \varphi(g \cdot x) \in p$

$\underset{p \text{ def-bar}}{\Leftrightarrow}$ $G \models d_p \psi(g)$, wobei $\psi(x,y) = \varphi(y \cdot x)$.

"$\Rightarrow$" nach Def

"$\Leftarrow$" da $g \cdot p$ der einzige Typ von $[g \cdot p = p]$ MR α ist in $\varphi(g \cdot x)$.

ad ② $Stab_p(y) = d_p \psi(y) = d_{p'} \psi(y)$ $\quad p' = p \restriction_{G'}$ dies ist die eind. n.-g. Fortsetzung von p nach G'.

ad ③ Sei $b \in Stab_p(G')$.

$G'' \geq G' \geq G$. Sei $a \models p \restriction_{G'}$, insbes. $a \perp_G b$.

z.z.: $MR(b/G) \leq MR(p) = MR(a/G)$.

Wir haben $MR(b/G) \overset{\downarrow}{=} MR(b/aG)$

$\overset{\text{interdef}}{=} MR(b \cdot a / Ga)$

$\leq MR(ba/G)$

$b \in Stab_{p'}$, $ba \models p'$, $ba \models p$ $\quad = MR(ba/G)$ $\quad \boxtimes$