Vortrag

Freitag, 21. April 2017 16:36

Einleitung:

Der Vortrag dreht sich um die modelltheoretischen Eigenschaften separabel abgeschlossener Körper. Wir werden zeigen, dass die Theorie dieser Körper in einer festen Charakteristik $p \neq 0$ unter gewissen Einschränkungen vollständig ist. Für den Rest des Vortrages halten wir eine solche Charakteristik fest. Zunächst klären wir die algebraischen Grundlagen.

Def:	- Ein Polynom heißt **separabel** über einem Körper F, falls es keine mehrfachen Nullstellen über $\overline{F}$ besitzt. - Ein Element aus $\overline{F}$ heißt separabel über F, falls sein Minimalpolynom über F separabel ist. - Eine Körpererweiterung E/F heißt separabel, falls jedes Element aus E über F separabel ist. - $\hat{F} \subseteq \overline{F}$ bezeichnet den **separablen Abschluss** von F, also die maximale separable algebraische Erweiterung.
Bem:	Ein irreduzibles Polynom ist genau dann separabel, wenn seine formale Ableitung ungleich null ist.
Bew:	Sei $f \in F\ [X]$ irreduzibel mit mehrfacher Nullstelle $\alpha \in \overline{F}$. Dann ist f das Minimalpolynom zu α. Da α aber auch eine Nullstelle von f' ist gilt f teilt f'. Da $grad(f') < grad(f) \Rightarrow f' = 0$. Sei andersrum $f' = 0$, so ist $f(x) = \sum_{i=0}^{n} a_i x^{i*p} = h(x^p)$. Jede Nullstelle von f' ist also eine p-te Wurzel einer Nullstelle von h, also eine p-fache Nullstelle von f.
Bem:	Wir haben gesehen, dass jedes inseparable Element eine p^n-te Wurzel ist. Der algebraische Abschluss ist also die Vereinigung des separablen und des perfekten Abschlusses. Obendrein ist eine Körpererweiterung inseperabel, wenn ein perfektes Element hinzu kommt.
Def:	$\tilde{F} = \bigcup_{i=1}^{\infty} \{x^{p^{-i}} \mid x \in F\}$ Bezeichnen wir als den **perfekten Abschluss** von F. In ihm hat jedes Elemen für alle n eine p^n-te Wurzel. Gilt $F = \tilde{F}$, so nennen wir F **perfekt**. Eine äquivalente Bedingung ist, dass $F = F^p := \{x^p \mid x \in F\}$ gilt.
Bem:	F^p ist ebenfalls ein Körper, da er das Bild des Forbeniushomomorphismus ist. Es folgt, dass alle endlichen Körper, sowie Körper der Charakteristik 0 perfekt sind. Da in einem perfekten Körper bereits alle p-ten Wurzeln existieren ist jede algebraische Erweiterung eines solchen Körpers separabel. Um einen nicht separable Körpererweiterung zu konstruieren müssen wir uns also transzendente Erweiterungen von endlichen Körpern anschauen. Ein Beispiel für eine nicht separable Erweiterung ist: $F_p(x^p) \subset F_p(x)$ Hierbei sind x und somit auch x^p transzendent über F_p und es kommt x als die p-te Wurzel aus x^p hinzu. Dies ist eine echte Körpererweiterung, da wenn x über F_p bereits von x^p erzeugt würde, gäbe es eine Polynomgleichung die x annuliert.
Ziel:	Wir wollen eine Verallgemeinerung des Separabilitätsbegriffes auf nicht notwendigerweise algebraische Erweiterungen.
Def:	- Ein Element x heißt **transzendent** über einem Körper K, wenn es nur vom Nullpolynom annulliert wird: $\forall 0 \neq p \in K[X]: p(x) \neq 0$ - Eine Körpererweiterung heißt Transzendent, wenn sie mindestens ein transzendentes Element enthählt. - Eine endliche Menge $X = \{x_1, \dots, x_n\}$ heißt **algebraisch unabhängig** über einem Körper K, wenn es keine algebraische Gleichung gibt, die X annuliert. $\forall 0 \neq p \in K[X_1, \dots, X_n]: p(x_1, \dots, x_n) \neq 0$ - Eine unendliche Menge heißt algebraisch unabhängig über einem Körper K, wenn jede endliche Teilmenge algebraisch unabhängig über K ist. - Sei $E \subseteq F$ eine Körpererweiterung. Eine **Transzendenzbasis** ist eine maximale algebraisch unabhängige Menge oder anders ausgedrückt eine minimale Menge T, sodass $(E \subseteq)\ E(T) \subseteq F$ eine algebraische Erweiterung ist. - Eine **separierende Transzendenzbasis** ist eine Transzendenzbasis T von $E \subseteq F$, sodass $E(T) \subseteq F$ eine separable Körpererweiterung ist.
Bsp:	- $\mathbb{Q} \subset \mathbb{Q}(\pi, \sqrt{2\pi})$ ist eine transzendente Körpererweiterung. Dabei sind sowohl $\{\pi\}$, als auch $\{\sqrt{2\pi}\}$ Transzendenzbasen der Körpererweiterung, denn $\frac{1}{2}X^2 - x$ annuliert $(\sqrt{2\pi}, \pi)$ und somit ist $\{\sqrt{2\pi}, \pi\}$ algebraisch abhängig über $\mathbb{Q}$.

	- Sei x transzendent über $\mathbb{F}_p$, dann sind sowohl $\{x\}$, als auch $\{x^p\}$ Transzendenzbasen von $\mathbb{F}_p \subset \mathbb{F}_p(x)$, allerdings ist nur $\{x\}$ eine separierende Transzendenzbasis, da $\mathbb{F}_p(x^p) \subset F_p(x)$ zwar eine algebraische Erweiterung ist, allerdings keine separable.
<u>Bem:</u>	Jede Körpererweiterung besitzt eine Transzendenzbasis und je zwei Transzendenzbasen besitzen die gleiche Mächtigkeit.
<u>Bew:</u>	$F \subseteq K$. Wir wollen zeigen, dass die Menge der über F algebraisch unabhängigen Mengen ein maximales Element hat. Dafür zeigen wir, dass die Vereinigung jeder Kette algebraisch unabhängiger Mengen wieder algebraisch unabhängig ist und wenden dann das Lemma von Zorn an. Sei also $X_1 \subseteq X_2 \subseteq \cdots$ eine Solche Kette und $X = \bigcup_{i \in I} X_i$ die Vereinigung dieser Kette. Zz. Jede endliche Teilmenge von X ist algebraisch unabhänig. Dies gilt, da jede endliche Teilmenge von X bereits in einem der X_i entahlten ist und in denen bereits jede endliche Teilmenge algebraisch unabhängig ist.
<u>Def:</u>	Eine endlich erzeugte Körpererweiterung heißt **separabel**, wenn sie eine separierende Transzendenzbasis besitzt. Eine unendlich erzeugte Körpererweiterung $E \subset F$ heißt separabel, wenn jede endlich erzeugte Körpererweiterung $E \subseteq E(f_1, \dots, f_n)$ $(\subset F)$ eine separierende Transzendenzbasis besitzt.
<u>Bem:</u>	- Diese Definition ist offensichtlich eine Verallgemeinerung des Separabilitätsbegriffes für algebraische Erweiterungen. - Die Definition für unendlich erzeugte Körpererweiterungen unterscheidet sich von der für endlich erzeugte, da wir wollen, dass rein transzendente Erweiterungen immer separabel sind. Oder anders ausgedrückt soll immer noch jede Erweiterung eines perfekten Körpers separabel sein. Als Beispiel: $\mathbb{F}_p$ ist ein Perfekter Körper. Sei x transzendent über $\mathbb{F}_p$. Wir nehmen $\mathbb{F}_p(x)$ und bilden davon den perfekten Abschluss: $\widetilde{\mathbb{F}_p(x)} = \mathbb{F}_p(\{x^{p^i} \mid i \in \mathbb{Z}\})$. Nun ist $\left\{\left\{x^{p^i} * f\right\} \mid i \in \mathbb{Z}, 0 \neq f \in \mathbb{F}_p\right\}$ die Menge der Transzendenzbasen von $\widetilde{\mathbb{F}_p(x)}$, doch keine von ihnen ist separierend, da $\mathbb{F}_p \subset \mathbb{F}\left(x^{p^i}\right) \subset \mathbb{F}\left(x^{p^{i-1}}\right) \subset \widetilde{\mathbb{F}_p(x)}$ nicht separabel ist. - Aus obigem Beispiel geht hervor, dass sich jede Transzendenzbasis von $E \subseteq F$ aufteilt in Elemente die in F alle p-ten Wurzeln besitzen und solche, die das nicht haben. Da jeder Körper mit Charakteristik p eine Erweiterung von $\mathbb{F}_p$ ist können wir mit folgender Definition solche Körper näher klassifizieren.
<u>Def:</u>	Sei $\mathbb{F}_p \subset E$ und $T = \{t_i \mid i \in I\}$ eine Transzendenzbasis. Dann bezeichnen wir $\left\{t_i^{p^{-j}} \mid t_i \in T, j \in N, t_i^{p^{j-1}} \notin F\right\} := B$ Als **p-Basis** von E. Und $\nu := \lvert B \rvert$ bezeichnen wir als die **Invarianz** von E.
<u>Bem:</u>	- Für die p-Basis haben wir uns die Elemente aus der Transzendenzbasis genommen, die nicht alle p-ten Wurzeln besitzen und schauen uns davon die niedrigste Wurzel an, die noch in F enthalten ist. - Die Invarianz misst, wie viele der transzendenten Elemente nicht alle p-ten Wurzeln haben, also wie weit der Körper davon entfernt ist perfekt zu sein. - Da es eigentlich nur darum geht algebraisch unabhängige Elemente zu finden, die kein p-ten Wurzeln haben ist folgendes eine äquivalente Definition.
<u>Def:</u>	Eine **p-Basis** ist ein minimales Erzeugendensystem von F/F^p
<u>Lemma:</u>	Sein F mit endlicher Invarianz ν gegeben, dann gilt: $[F : F^p] = p^\nu$
<u>Bew:</u>	Sei $B := \{b_1, \dots, b_n\}$ eine Transzendenzbasis, dann gilt $F^p \subset F(\{b_1\}) \subset F(\{b_1, b_2\}) \subset \cdots \subset F(B)$ Wobei jede der Erweiterungen echt ist, da B ein minimales Erzeugenden System ist und algebraisch, da $b_i^p \in F^p$. Da der grad einer einfachen algebraischen Körpererweiterung dem Grad des Minimalpolynoms des neuen Elementes entspricht ist $[F^p(\{b_1, \dots, b_i\}) : F^p(\{b_1, \dots, b_{i+1}\})] = \deg\left(X^p - b_{i+1}^p\right) = p$. Es folgt die Behauptung.

Im Folgenden zeigen wir das die Theorie $SCF_{p,\nu}$ separabel abgeschlossener Körper einer festen Charakterist p und einer festen Invarianz ν vollständig ist.

<u>Bem:</u> $SCF_{p,\nu}$ lässt sich in der Logik erster Stufe in der Sparche L_{Ring} als Erweiterung der Theorie der Körper axiomatisieren.

Separabel abgeschlossen	Jedes Polynom, dessen formale Ableitung nicht null ist besitzt eine Nullstelle
Invarianz ν	Es existieren p^ν viele Elemente, die über F^p linear unabhängig sind $\varphi_n := \exists x_1, \dots, x_{\nu^p} \forall y_1, \dots, x_{\nu^p} : y_1^p x_1 + \cdots + y_{\nu^p}^p x_{\nu^p} \neq 0$ Für $\nu \in \mathbb{N}$ reicht $\varphi_\nu \wedge \neg\varphi_{\nu+1}$, wohingegen wir für $\nu = \infty$ die Menge$\{\varphi_n \mid n \in \mathbb{N}\}$ hinzufügen müssen.
Charakteristik p	$\exists x \neq 0 : x + \cdots + x = 0$

Bem:	Da wir nun nur noch separabel abgeschlossene Körper betrachten können wir diese durch die oben genannte Aufspaltung in eine p-Basis und transzendente Elemente, die alle p-ten Wurzeln haben näher charakterisieren. $K \vDash SCF_{p,\nu}$, dann erhalten wir $K = \overline{\mathbb{F}_p\widehat{(T)}}(B)$ wobei $T \cup B$ eine Transzendenzbasis von $K/\mathbb{F}_p$ bildet. Es ist klar, dass alle Modelle von $SCF_{p,\nu}$, die über $\mathbb{F}_p$ den gleichen Transzendenzgrad haben isomorph sind.
Lemma:	Für zwei Modelle $F \subset K$ von $SCF_{p,\nu}$ gilt $F \preccurlyeq K$, wenn F und K die gleiche p-Basis besitzen.
Bem:	Haben die beiden nicht die gleiche p-Basis, so besitzt ein Element der p-Basis von F in K eine p-te Wurzel, obwohl es die in F nicht besitzt und somit kann die Erweiterung nicht elementar sein.
Bew:	Sei $K = \overline{\mathbb{F}_p\widehat{(T)}}(B)$ und $F = \overline{\mathbb{F}_p\widehat{(T')}}(B)$ mit $T' \subset T$. Um zu zeigen, dass dies eine elementare Unterstruktur ist, wenden wir Tarskis Test an und zeigen, dass für jede $L(F)$-Aussage $\varphi(x)$ gilt $K \vDash \exists x{:}\, \varphi(x) \Rightarrow F \vDash \exists x{:}\, \varphi(x)$. Wir wählen uns eine $\lvert K\rvert^+ -$ saturierte Elementare Erweiterung $F \preccurlyeq F^*$. Weil $\{\neg x = b \mid b \in F^*\}$ eine Typ erzeugt, muss $\lvert F\rvert \leq \lvert K\rvert < \lvert F^*\rvert$. Nun muss F^* Transzendenzgrad $\lvert F^*\rvert$ über F haben, da $F^* = \overline{\mathbb{F}_p\widehat{(T^*)}}(B)$ ist und sich beim algebraischen und separablen Abschließen die Mächtigkeit höchstens abzählbar "vervielfacht". Also gilt $\lvert T'\rvert < \lvert T^*\rvert$ und somit lässt sich T' in T^* einbetten und K in F^*. Es folgt $K \vDash \exists x{:}\, \varphi(x) \Rightarrow F^* \vDash \exists x{:}\, \varphi(x) \Rightarrow F \vDash \exists x{:}\, \varphi(x)$.
Bem:	Im Fall $\nu = \infty$ reicht es, wenn die p-Basis B von F eine Teilmenge der p-Basis B' von K ist. Da in dem Fall $\{\neg x = b \mid b \in B\} \cup \{\neg\exists y{:}\, y^p = x\}$ ein Typ ist und in F^* realisiert wird.
Bem:	Erweitern wir unsere Sprache um ν viele Kostanten und fixieren diese in unserer Theorie als p-Basis, bzw. im Fall $\nu = \infty$ als Teilmenge einer p-Basis, so folgt, dass diese Theorie modellvollständig ist
Lemma:	$\widehat{\mathbb{F}_p(B)}$ ist das Primmodell von $SCF_{p,\nu}$
Satz:	$SCF_{p,\nu}$ ist vollständig.
Bew:	Die Aussage ergibt sich als Kombination der vorherigen zwei Lemma.

Alternativ Definition zu Separable Körpererweiterung.

Def:	Seien E/l, F/L zwei Körpererweiterungen. E und F heißen linear disjunkt über L, wenn: $\forall e_1, \dots, e_n \in E{:}\;\; e_1, \dots, e_n$ sind linear unabhängig über L $\Leftrightarrow\;\; e_1, \dots, e_n$ sind linear unabhängig über F
Bem:	Dies ist eine symmetrische Beziehung.
Bew:	Seien E und F linear disjunkt über L. zz. F und E sind linear disjunkt über L Ann: $\exists\, f_1, \dots, f_n \in F{:}\;\; f_1, \dots, f_n$ sind linear unabhängig über L $\Leftrightarrow\;\; f_1, \dots, f_n$ sind linear unabhängig über E Dann existiert eine Linearkombination $\sum_{i=1}^{n} e_i f_i = 0$. Da E und F linear disjunkt über L sind dürfen die e_i nicht linar unabhängig über L sein. Wir können ein $e_i \neq 0$ als Linearkombination aus den anderen e_i über L darstellen. Setzen wir dass in $\sum_{i=1}^{n} e_i f_i = 0$ ein erhalten wir eine neue Linearkombination der $\{e_1, \dots, e_n\}/\{e_i\}$ mit Elementen aus f die über L linear unabhängig sind. Setzen wir das induktiv fort erhalten wir irgendwann eine Linarkombination von e_i und f_i, wobei die e_i über L linear unabhängig sind und damit einen Wiederspruch.
Def:	Eine Körpererweiterung E/F heißt separabel, wenn F und E^p linear disjunkt über F^p.