Bewertete Körper

Henrik Graßhoff

27. Juni 2017

Der Vortrag gibt eine Einführung in bewertete Körper und ihre Modelltheorie.

Im ersten Vortrag (Abschnitte 1 und 2) führen wir das Konzept einer Bewertung ein und betrachten ein paar Beispiele. Sodann befassen wir uns mit den so genannten *henselschen* Bewertungen und geben zwei äquivalente Charakterisierungen an. Zuletzt übertragen wir kurz die Konzepte von Cauchyfolgen und Vollständigkeit auf bewertete Körper und zeigen zum Abschluss Hensels Lemma: jeder vollständig bewerte Körper, dessen Wertegruppe eine Untergruppe von $\mathbb{R}$ ist, ist henselsch bewertet.

Der zweite Vortrag fokussiert die Modelltheorie bewerteter Körper. Wir werden zwei Resultate kennenlernen, die es uns erlauben, Eigenschaften henselsch bewerteter Körper auf entsprechende Eigenschaften ihrer Restklassenkörper und Wertegruppen zurückzuführen. Zu nennen ist dort der Satz von Ax-Kochen/Ersov – *zwei henselsch bewertete Körper in Equicharakteristik* 0 *genau dann elementar äquivalent sind, wenn es ihre Restklassenkörper und Wertegruppen sind* – sowie der Satz von Delon – *ein henselsch bewerteter Körper mit Restklassencharakteristik* 0 *ist genau dann NIP, wenn es sein Restklassenkörper und seine Wertegruppe sind*.

1 Einführung in Bewertungen

Kleine Motivation. Fixiere einen Körper K. Ein Absolutbetrag auf K ist eine Abbildung

$$|\cdot|\colon K \longrightarrow \mathbb{R}_{\geq 0}$$

mit den Eigenschaften $|x| = 0 \implies x = 0$, $|xy| = |x||y|$ und $|x+y| \leq |x| + |y|$ für alle $x, y \in K$. Ein Absolutbetrag heißt nichtarchimedisch, falls er sogar $|x+y| \leq \max(|x|, |y|)$ erfüllt. Setzen wir für einen solchen nichtarchimedischen Absolutbetrag $v(x) := -\ln|x|$, so liefert das eine Abbildung

$$v\colon K \longrightarrow \mathbb{R} \cup \{\infty\}$$

mit den Eigenschaften

- $v(x) = \infty \iff x = 0$,
- $v(xy) = v(x) + v(y)$,
- $v(x + y) \geq \min(v(x), v(y))$.

Diese Funktion v ist eine Bewertung auf K. Wir beobachten, dass v lediglich die additive Struktur und die Ordnung von $\mathbb{R}$ benutzt, nicht aber die Multiplikation. Für eine *allgemeine* Bewertung lassen wir daher beliebige *angeordnete abelsche Gruppen* als Bildmengen zu. Im Folgenden erklären wir also den Begriff der angeordneten abelschen Gruppe und definieren im Anschluss Bewertungen.

Angeordnete abelsche Gruppen. Unter einer angeordneten abelschen Gruppe verstehen wir eine abelsche Gruppe Γ ausgestattet mit einer translationsinvarianten Totalordnung. Ausgeschrieben erfüllt eine solche Ordnung für alle $a, b, c \in \Gamma$ also:

- $a \leq a$,
- $a \leq b, b \leq c \implies a \leq c$,
- $a \leq b, b \leq a \implies a = b$,
- $a \leq b \vee b \leq a$,
- $a \leq b \implies a + c \leq b + c$.

Eine solche Gruppe ist stets torsionsfrei, (ist $a \neq 0$, so ist $0 < a < a^2 < \cdots$ oder $0 > a > \cdots$). Einfache Beispiele angeordneter abelscher Gruppen sind $(\mathbb{R}, +)$ und $(\mathbb{Q}, +)$. Angeordnete abelsche Gruppen fungieren – wie schon angedeutet – als Bildmengen allgemeiner Bewertungen.

Bewertungen. Eine Bewertung auf einem Körper K ist eine surjektive Abbildung

$$v\colon K \longrightarrow \Gamma \sqcup \{\infty\}$$

für eine angeordnete abelsche Gruppe Γ mit den drei Eigenschaften

1) $v(x) = \infty \iff x = 0$,
2) $v(xy) = v(x) + v(y)$,
3) $v(x + y) \geq \min(v(x), v(y))$.

Dabei erklären wir $g \leq \infty$ und $g + \infty := \infty$ für alle $g \in \Gamma$.

Jede Bewertung erfüllt

- $v(1) = 0$,
- $v\left(x^{-1}\right) = -v(x)$,
- $v(-x) = v(x)$,
- $v(x) < v(y) \implies v(x + y) = v(x)$, denn aus $v(x + y) > v(x)$ würde widersprüchlicherweise $v(x) = v(x + y - y) \geq \min(v(x + y), v(y)) > v(x)$ folgen.

Die Menge

$$\mathcal{O}_v := \{x \in K : v(x) \geq 0\}$$

ist ein Unterring von K und sogar ein *Bewertungsring*, das bedeutet es gilt $x \in \mathcal{O}_v$ oder $x^{-1} \in \mathcal{O}_v$ für alle $x \in K$. Dieser Ring ist lokal, sein einziges maximales Ideal ist gegeben durch

$$\mathfrak{m}_v := \mathcal{O}_v \setminus \mathcal{O}_v^\times = \{x \in K : v(x) > 0\}.$$

Der entsprechende Quotientenring $\mathcal{O}_v/\mathfrak{m}_v$ ist daher ein Körper – wir nennen ihn den Restklassenkörper Kv. Gelegentlich werden wir abkürzend $\mathcal{O}$ für $\mathcal{O}_v$ und $\mathfrak{m}$ für $\mathfrak{m}_v$ schreiben.

Es mag etwas verwirrend sein, dass im Restklassenkörper gilt:

$$\bar{a} = 0 \iff v(a) > 0 \qquad \text{und} \qquad \bar{a} \neq 0 \iff v(a) = 0.$$

Beispiele. Wir betrachten ein paar Beispiele:

- Fixiere eine Primzahl p. Jede rationale Zahl $x \neq 0$ schreibt sich eindeutig als

  $$x = p^n \frac{a}{b}$$

  für ganze Zahlen a, b, n derart, dass p, a, b paarweise teilerfremd sind. Dann definiert $v_p(x) := n$ die p-adische Bewertung auf $\mathbb{Q}$. Ihre Wertegruppe ist $\mathbb{Z}$, ihr Restklassenring

  $$\mathcal{O}_{v_p} = \{x \in \mathbb{Q} : v_p(x) \geq 0\} = \left\{\frac{a}{b} \in \mathbb{Q} : \mathrm{ggT}(a,b) = 1, p \nmid b\right\} = \mathbb{Z}_{\langle p \rangle}$$

  und dessen maximales Ideal

  $$\mathfrak{m}_{v_p} = \{x \in \mathbb{Q} : v_p(x) > 0\} = \left\{\frac{pa}{b} : \mathrm{ggT}(a,b) = 1, p \nmid b\right\} = p\mathbb{Z}_{\langle p \rangle}.$$

  Ihr Quotient $\mathcal{O}_{v_p}/\mathfrak{m}_{v_p}$ ist der Körper $\mathbb{F}_p$ mit p Elementen.
- Ein analoges Beispiel über dem Körper der rationalen Funktionen. Fixiere einen Körper K und ein irreduzibles Polynom $p \in K[X]$. Jedes $f \in K(X)$ schreibt sich eindeutig als $f = p^n \frac{g}{h}$ derart, dass p, g, h paarweise teilerfremd sind. Dann heißt $v_p(f) := n$ ebenfalls p-adische Bewertung. Hier ist $\mathcal{O}_{v_p} = K[X]_{\langle p \rangle}, \mathfrak{m}_{v_p} = pK[X]_{\langle p \rangle}, K(X)v_p \cong K[X]/\langle p \rangle$.
- Eine Spezialfall hier ist die X-adische Bewertung $v_X(\sum a_i X^i) = \min\{i : a_i \neq 0\}$.
- Zuletzt noch ein weniger interessantes Beispiel: Auf jedem Körper ist $K \to \{0, \infty\}$ definiert durch $0 \neq x \mapsto 0$ die triviale Bewertung.

2 Henselsche Bewertungen

Wir gelangen in diesem Abschnitt zu den eingangs erwähnten henselschen Bewertungen, benannt nach Kurt Hensel (1861–1941).

Henselsche Bewertungen. Für einen bewerteten Körper (K, v) sind äquivalent:

- Ist $f \in \mathcal{O}[X]$ und $a \in \mathcal{O}$ mit $\overline{f}(\overline{a}) = 0$ und $\overline{f}'(\overline{a}) \neq 0$, so existiert ein $\alpha \in \mathcal{O}$ mit $f(\alpha) = 0$ und $\overline{\alpha} = \overline{a}$.
- Ist $f \in \mathcal{O}[X]$ und $a \in \mathcal{O}$ mit $v(f(a)) > 2v(f'(a))$, so gibt es ein $\alpha \in \mathcal{O}$ mit $f(\alpha) = 0$ und $v(\alpha - a) > v(f'(a))$.

In diesem Fall heißt v oder auch (K, v) henselsch.

Beweis. Die Implikation $\Longleftarrow$ ist einfach. Sind f, a vorgegeben, so gilt $v(f(a)) > 0$ wegen $\overline{f(a)} = 0$ und $v(f'(a)) = 0$ wegen $\overline{f}'(\overline{a}) \neq 0$. Nach Voraussetzung gibt es ein $\alpha \in \mathcal{O}$ mit $f(\alpha) = 0$ und $v(\alpha - a) > v(f'(a)) = 0$; aus Letzterem folgt $\overline{\alpha} = \overline{a}$.

Wir zeigen im Folgenden die Implikation $\Longrightarrow$. Sei $f = \sum_{i=0}^{n} c_i X^i \in \mathcal{O}[X]$ und $a \in \mathcal{O}$ mit $v(f(a)) > 2v(f'(a))$. Schreibe

$$f(a - X) = \sum_{i=0}^{n} c_i (a - X)^i = c_0 + \sum_{i=1}^{n} c_i (a^i - i a^{i-1} X + g_i(X) X^2)$$

für $g_i \in \mathcal{O}[X]$. Durch Setzen von $g(X) := \sum_{i=1}^{n} c_i g_i(X)$ erhalten wir die Darstellung

$$f(a - X) = f(a) - f'(a)X + X^2 g(X).$$

Wir substituieren nun die Variablen. Da $f'(a) \neq 0$ nach Voraussetzung, setzen wir $X = Y \cdot f'(a)$ und erhalten

$$\begin{aligned} h(Y) := \frac{f(a - X)}{f'(a)^2} &= \frac{f(a)}{f'(a)^2} - \frac{f'(a)X}{f'(a)^2} + \frac{X^2 g(X)}{f'(a)^2} \\ &= \frac{f(a)}{f'(a)^2} - Y + g(f'(a)Y)Y^2 \in \mathcal{O}[Y]. \end{aligned}$$

Wegen $v(f(a)) > 2v(f'(a))$ und $f'(a) \in \mathcal{O}$ ist h tatsächlich ein Polynom in $\mathcal{O}[Y]$. Es ist

$$\overline{h}(\overline{0}) = \overline{\left(\frac{f(a)}{f'(a)^2} \right)} = 0 \neq -1 = \overline{h}'(\overline{0}),$$

das heißt, $\overline{h}$ hat die einfache Nullstelle $\overline{0}$. Wir finden daher ein $b \in \mathcal{O}$ mit $h(b) = 0$ und $\overline{b} = \overline{0} = 0$, das heißt $b \in \mathfrak{m}$. Dann ist $\alpha := a - f'(a)b \in \mathcal{O}$ eine Nullstelle von f mit der gewünschten Eigenschaft $v(\alpha - a) = v(f'(a)b) = v(f'(a)) + v(b) > v(f'(a))$. $\square$

Gegenbeispiel. Der Körper $(\mathbb{Q}, v_3)$ ist nicht henselsch. Betrachte zum Beispiel das Polynom $f = X^2 + 2 \in \mathcal{O}[X]$. Es hat keine rationale Nullstelle, sein Redukt $\overline{f} \in \mathbb{F}_3[X]$ hat aber die einfache Nullstelle $\overline{2}$. Daher kann $(\mathbb{Q}, v_3)$ nicht henselsch sein. Allgemeiner ist $(\mathbb{Q}, v_p)$ nie henselsch.

Fakt. Ein Körper (K, v) ist genau dann henselsch bewertet, falls v eine eindeutige Fortsetzung auf jede algebraische Körpererweiterung besitzt (siehe zum Beispiel Engler & Prestel, *Valued Fields*, Theorem 4.1.3).

Wir wollen nun kurz das Konzept einer Cauchyfolge und von Vollständigkeit für bewertete Körper erklären, um schließlich zu zeigen, dass vollständige bewertete Körper stets henselsche Bewertungen tragen – diese Aussage ist als Hensels Lemma bekannt.

Vollständige bewertete Körper. Sei (K, v) ein bewerteter Körper mit Wertegruppe $vK \leq \mathbb{R}$. Eine Folge $(a_i)_{i \in \mathbb{N}}$ in K heißt Cauchyfolge, falls für alle $x \in \mathbb{R}$ ein $N \in \mathbb{N}$ existiert, sodass $v(a_n - a_m) > x$ für alle $n, m > N$. Eine solche Folge konvergiert gegen a, geschrieben $\lim a_i = a$, falls für alle $x \in \mathbb{R}$ ein $N \in \mathbb{N}$ existiert, sodass $v(a_n - a) > x$ für alle $n \geq N$. Es heißt (K, v) vollständig, falls jede Cauchyfolge konvergiert. Jeder bewertete Körper (K, v) besitzt eine (bis auf Isomorphie bewerteter Körper eindeutige) Vervollständigung, welche vollständig ist und K als dichte Teilmenge enthält – der Beweis ist ähnlich zu der Konstruktion von $\mathbb{R}$ aus $\mathbb{Q}$.

Beispiele. Zwei Beispiele:

- Der bewertete Körper $(\mathbb{Q}, v_p)$ ist nicht vollständig. Die Vervollständigung $\mathbb{Q}_p$ von $\mathbb{Q}$ bezüglich der p-adischen Bewertung heißt Körper der p-adischen Zahlen.
- Der Körper $K(X)$ mit der X-adischen Bewertungen ist ebenfalls nicht vollständig. Die Vervollständigung von $K(X)$ ist

$$K((X)) := \left\{ \sum_{i \geq m} a_i X^i : a_i \in K, m \in \mathbb{Z} \right\}.$$

Das folgende Lemma ist der Abschluss des ersten Vortrags. Es besagt, dass alle vollständigen bewerteten Körper henselsch sind.

Hensels Lemma. Ist (K, v) vollständig mit $vK \leq \mathbb{R}$, so ist v henselsch.

Beweis. Wir weisen die zweite Charakterisierung henselscher Bewertungen nach. Seien $f \in \mathcal{O}[X]$ und $a \in \mathcal{O}$ mit $v(f(a)) > 2v(f'(a))$. Wähle $\varepsilon > 0$ mit $v(f(a)) = 2v(f'(a)) + \varepsilon$. Wegen $v(f(a)) > 2v(f'(a))$ ist $f'(a) \neq 0$ und $f(a)/f'(a) \in \mathfrak{m}$. Setze

$$a_1 := a - \frac{f(a)}{f'(a)} \in \mathcal{O}$$

und schreibe

$$f(a_1) = f(a) + f'(a)\left(-\frac{f(a)}{f'(a)}\right) + \left(\frac{f(a)}{f'(a)}\right)^2 \cdot c = \left(\frac{f(a)}{f'(a)}\right)^2 \cdot c$$

für $c \in \mathcal{O}$. Wir können ablesen, dass

$$v(f(a_1)) \geq 2v(f(a)/f'(a)) = 2v(f(a)) - 2v(f'(a)) = 2v(f'(a)) + 2\varepsilon.$$

Ähnlich schreiben wir $f'(a_1)$ als

$$f'(a_1) = f'(a) + f''(a)\left(-\frac{f(a)}{f'(a)}\right) + \left(\frac{f(a)}{f'(a)}\right)^2 c' = f'(a) + \frac{f(a)}{f'(a)}\left(-f''(a) + \frac{f(a)}{f'(a)}c'\right)$$

für ein $c' \in \mathcal{O}$. Zusammen mit $v(f'(a)) < v(f(a)/f'(a))$ erhalten wir

$$v(f'(a_1)) = v\left(f'(a) + \frac{f(a)}{f'(a)}\left(-f''(a) + \frac{f(a)}{f'(a)} \cdot c'\right)\right) = v(f'(a)).$$

Außerdem gilt $v(a - a_1) = v(f'(a)) + \varepsilon$.

Nun setze $a_0 := a$ und definiere $a_{n+1} := a_n - f(a_n)/f'(a_n)$. Die obigen Rechnungen können wir mit a_{n+1} statt a_1 und a_n statt a durchführen; das liefert uns

$$v(f'(a_{n+1})) = v(f'(a)) \quad \text{und} \quad v(f(a_n)) \geq 2^n v(f'(a)) + n\varepsilon.$$

Damit können wir uns überlegen, dass $(a_n)_n$ tatsächlich eine Cauchyfolge ist, denn

$$v(a_{n+1} - a_n) = v\left(\frac{f(a_n)}{f'(a_{n+1})}\right) \geq 2^n v(f'(a)) + n\varepsilon - v(f'(a)) \geq n\varepsilon.$$

Da (K, v) vollständig ist, gibt es einen Grenzwert $b = \lim_n a_n$. Dies ist eine Nullstelle von f. Wegen

$$v(a_n - a) \geq \min_{0 \leq m < n} \{v(a_{m+1} - a_m)\} > v(f'(a))$$

ist auch $v(b - a) > v(f'(a))$. □

3 Der Satz von Ax-Kochen/Ersov

Definition. Sei (K, v) ein bewerteter Körper. Eine angular component map bzw. ac-Abbildung auf (K, v) ist eine Surjektion $\mathrm{ac}\colon K \twoheadrightarrow Kv$ mit den Eigenschaften

- ▷ $\mathrm{ac}(x) = 0 \iff x = 0$,
- ▷ $\mathrm{ac}|_{K^\times}\colon K^\times \to (Kv)^\times$ ist ein Gruppenhomomorphismus,
- ▷ $\mathrm{ac}|_{\mathcal{O}^\times} = \mathrm{res}|_{\mathcal{O}^\times}$.

In diesem Fall heißt (K, v, ac) ein ac-bewerteter Körper. Eine ac-Abbildung erfüllt $v(x) = v(y) = v(x-y) \Longrightarrow \mathrm{ac}(x) \neq \mathrm{ac}(y)$ und $v(x) < v(y) \Longrightarrow \mathrm{ac}(x+y) = \mathrm{ac}(x)$.

Beweis von ersterem: Schreibe $x = c \cdot \alpha_1, y = c \cdot \alpha_2, x - y = c \cdot \alpha_3$ für c mit $v(c) = v(x)$ und $\alpha_i \in \mathcal{O}^\times$.

Beispiele (konkret). Auf $(\mathbb{Q}_p, v_p)$ ist $a = \sum a_i p^i \mapsto a_{v_p(a)}$ eine ac-Abbildung. Auf $(K((X)), v_X)$ ist $f = \sum a_i X^i \mapsto a_{v_X(f)}$ eine ac-Abbildung.

Beispiele (allgemeiner). Allgemein funktioniert die folgende Konstruktion: Ein Schnitt s von v ist eine Abbildung $s\colon vK \to K$ mit $s(\gamma + \gamma') = s(\gamma)s(\gamma')$ und $v \circ s = \mathrm{id}_{vK}$. Beispielsweise besitzt die p-adische Bewertung auf $\mathbb{Q}$ den Schnitt $k \mapsto p^k$; die X-adische Bewertung auf $K((X))$ den Schnitt $k \mapsto X^k$. Aus einem Schnitt gewinnt man stets eine ac-Abbildung durch die Formel

$$\mathrm{ac}(x) := \begin{cases} \mathrm{res}\left(\frac{x}{s(v(x))}\right), & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}.$$

Nicht jeder henselsch bewertete Körper besitzt eine ac-Abbildung; jeder $\aleph_1$-saturierte bewertete Körper aber schon, denn in einem solchen saturierten Körper hat die Bewertung einen Schnitt.

Es bezeichne T_{Pas} die Theorie henselsch ac-bewerteter Körper mit den Charakteristiken $\mathrm{char}(K) = \mathrm{char}(Kv) = 0$. Die Denef-Pas-Sprache $\mathcal{L}_{\mathrm{DP}}$ ist die Sprache, in welcher wir über henselsch ac-bewertete Körper sprechen. Sie hat die drei Sorten K, vK, Kv mit $\mathcal{L}_{\mathrm{ring}}$ auf K und Kv sowie $\mathcal{L}_{\mathrm{oag}} \sqcup \{\infty\} = \{0, +, \leq, \infty\}$ auf Kv sowie Funktionen

$$v\colon K \longrightarrow vK, \qquad \mathrm{ac}\colon K \longrightarrow Kv.$$

Wir benutzen ohne den Beweis:

Satz von Pas. Die Theorie T_{Pas} eliminiert Körperquantoren. □

Präziser gilt: Jede $\mathcal{L}_{\mathrm{DP}}$-Formel $\phi(\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z})$ (hier sind $\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z}$ Variablentupel aus K, vK, Kv) ist äquivalent zu einer booleschen Kombination von Formeln der Gestalt

$$\phi_1(\mathbf{x}) \wedge \phi_2(v(f(\mathbf{x})), \mathbf{y}) \wedge \phi_3(\mathrm{ac}(f(\mathbf{x})), \mathbf{z}),$$

wobei $f(\mathbf{x})$ ein Tupel von Elementen aus $\mathbb{Z}[\mathbf{x}]$, ϕ_1 eine quantorenfreie $\mathcal{L}_{\mathrm{ring}}$-Formel, ϕ_2 eine $(\mathcal{L}_{\mathrm{oag}} \cup \{\infty\})$-Formel und ϕ_3 eine $\mathcal{L}_{\mathrm{ring}}$-Formel ist. Aus dieser partiellen Quantorenelimination folgern wir:

Korollar. Seien $\mathcal{K} = (K, vK, Kv), \mathcal{L} = (L, wL, Lw) \models T_{\text{Pas}}$ mit Unterstrukturen K' bzw. L'. Sei $f\colon K' \to L'$ ein $\mathcal{L}_{\text{DP}}$-Isomorphismus. Ist f elementar in vK und Kv, so gilt

$$\mathcal{K} \models \phi[a_1, \ldots, a_n] \iff \mathcal{L} \models \phi[f(a_1), \ldots, f(a_n)]$$

für alle $a_1, \ldots, a_n \in K'$. □

Damit zeigen wir nun den Satz von Ax-Kochen/Ersov für ac-bewertete Körper:

Satz von Ax-Kochen/Ersov. Für $K, L \models T_{\text{Pas}}$ gilt

$$K \equiv L \iff Kv \equiv Lw \text{ und } vK \equiv wL.$$

Beweis. Die Implikation $\Longrightarrow$ ist klar. Wir betrachten die gemeinsame Unterstruktur $\mathbb{Z}$ von K, L sowie Kv, Lw und die gemeinsame Unterstruktur $\{0\}$ von vK, wL. Die Abbildung

$$f\colon K \supseteq (\mathbb{Z}, \{0\}, \mathbb{Z}, \text{ac}_K) \xrightarrow{\sim} (\mathbb{Z}, \{0\}, \mathbb{Z}, \text{ac}_L) \subseteq L$$

ist ein $\mathcal{L}_{\text{DP}}$-Isomorphismus, denn: Es gilt $v|_{\mathbb{Z}} = w|_{\mathbb{Z}} = 0$ – ansonsten wäre $\text{char}(Kv)$ oder $\text{char}(Lw)$ größer 0 (man kann zeigen, dass die triviale und die p-adischen Bewertungen bis auf Äquivalenz die einzigen Bewertungen auf $\mathbb{Q}$ sind) – und somit $\text{ac}_K|_{\mathbb{Z}} = \text{ac}_L|_{\mathbb{Z}} = \text{id}_{\mathbb{Z}}$. Nach obigem Korollar folgt dann $K \equiv L$. □

Der Satz von Ax-Kochen/Ersov gilt noch immer, wenn man nicht die Existenz einer ac-Abbildung fordert. Das folgende Resultat ist ein berühmtes Transferergebnis mit vielen Anwendungen:

Korollar (Ax-Kochen/Ersov-Transferprinzip). Ist ϕ ein $\mathcal{L}_{\text{DP}}$-Satz, so gilt $\mathbb{Q}_p \models \phi \iff \mathbb{F}_p((t)) \models \phi$ für fast alle Primzahlen p.

Beweis. Angenommen nicht und ϕ sei ein Gegenbeispiel. Sei X die unendliche Menge aller p mit $\mathbb{Q}_p \models \neg\phi$ und $\mathbb{F}_p((t)) \models \phi$. Wähle einen X enthaltenden, nichtprinzipalen Ultrafilter $\mathcal{U}$ auf der Menge aller Primzahlen. Für primes p setze $K_p = \mathbb{F}_p((t))$, falls $\mathbb{F}_p((t)) \models \phi$ und anderenfalls $K_p = \mathbb{Q}_p$. Analog setze $L_p = \mathbb{Q}_p$, falls $\mathbb{Q}_p \models \phi$ und anderenfalls $L_p = \mathbb{F}_p((t))$. Dann sind $\mathcal{K} := \prod_{p \text{ prim}} K_p/\mathcal{U}$ und $\mathcal{L} := \prod_{p \text{ prim}} L_p/\mathcal{U}$ Modelle der Theorie T_{Pas} mit gleicher Wertegruppe und gleichem Restklassenkörper. Sie sind nach Ax-Kochen/Ersov daher elementar äquivalent. Aber $X \subseteq \{p : K_p \models \phi\} \cap \{p : L_p \models \neg\phi\}$ und wegen $X \in \mathcal{U}$ ist $\mathcal{K} \models \phi$ und $\mathcal{L} \models \neg\phi$. Widerspruch! □

4 NIP-Transfer: der Satz von Delon

Zum Abschluss des Vortrages wollen wir natürlich auf NIP zu sprechen kommen und folgendes Transferergebnis beweisen:

Satz von Delon. $K \models T_{\text{Pas}}$ ist NIP genau dann, wenn Kv und vK NIP sind.

Für den Beweis benötigen wir zwei Lemmata:

Lemma 1. Sei $P(X) = \sum_{k \leq n} a_k X^k \in K[X]$ und $(x_i)_{i<\omega}$ eine Folge von Elementen in K, sodass $(v(x_i))_{i<\omega}$ streng monoton steigt oder fällt. Dann gibt es $r \leq n$ und $t < \omega$, sodass für alle $i \geq t$ und $k \neq r$ gilt: $v(P(x_i)) = v(a_r x_i^r) < v(a_k x_i^k)$ (und folglich auch $\mathrm{ac}(P(x_i)) = \mathrm{ac}(a_r x_i^r)$).

Beweis. Tafelzeichnung. □

Wir klassifizieren nun ununterscheidbare Folgen $(x_i)_{i<\omega}$ aus K. Das wird für den Beweis des zweiten Lemmas nützlich sein.

Fall 0: Die Folge $(v(x_i))_{i<\omega}$ ist nicht konstant. Dann muss sie aufgrund der Ununterscheidbar strikt steigen oder fallen.

Für die nächsten Fälle nehmen wir also an, dass $(v(x_i))_{i<\omega}$ konstant ist. Für $0 < i < \omega$ sei $y_i := x_i - x_0$. Die Folge $(v(y_i))_{0<i<\omega}$ ist dann ebenfalls ununterscheidbar. Falls sie nicht konstant ist, so muss sie strikt fallen. Angenommen nämlich, sie würde strikt steigen. Dann gälte für $i \geq 2$, $v(x_i - x_1) = v(y_i - y_1) = v(y_1)$ (beachte $v(a) < v(b) \implies v(a+b) = v(a)$), das heißt $v(x_i - x_1)$ wäre konstant im Unterschied zu $v(x_i - x_0) = v(y_i)$ im Widerspruch zur Ununterscheidbarkeit.

Fall 1: Die Folge $(v(y_i))_{0<i<\omega}$ ist strikt fallend.

Fall 2i: Die Folge $(v(y_i))_{0<i<\omega}$ ist konstant und $(\mathrm{ac}(y_i))_{0<i<\omega}$ ist es nicht.

Fall 2ii: Sowohl $(v(y_i))_{0<i<\omega}$ als auch $(\mathrm{ac}(y_i))_{0<i<\omega}$ sind konstant. Dann ist $v(x_2 - x_1) = v(y_2 - y_1) > v(x_2)$ (klar gilt $v(y_2 - y_1) \geq v(y_2)$ und wäre $v(y_2 - y_1) > v(y_2) = v(y_1)$, so würde $\mathrm{ac}(y_2) \neq \mathrm{ac}(y_1)$ folgen). Wähle x_ω mit der Eigenschaft, dass $(x_i)_{i\leq\omega}$ noch immer ununterscheidbar ist. Für $i < \omega$ sei $z_i = x_i - x_\omega$. Die Folge $(v(z_i))_{i<\omega}$ ist ebenfalls ununterscheidbar und steigt zudem streng monoton.

Lemma 2. Sei $(x_i)_{i<\omega}$ eine ununterscheidbare Folge von Elementen aus K. Dann gibt es jeweils ununterscheidbare Folgen

$$(\alpha_i)_{i<\omega} \subseteq vK \quad \text{und} \quad (b_i)_{i<\omega} \subseteq Kv,$$

sodass gilt: für jedes $P(X) \in K[X]$ gibt es $r < \omega$ und $\gamma \in vK$, sodass $v(P(x_i)) = \gamma + r\alpha_i$ für genügend großes i. Außerdem gibt es ein $Q \in Kv[X]$, sodass $\mathrm{ac}(P(x_i)) = q(b_i)$ für genügend großes i.

Beweis. Ist $(x_i)_i$ wie in **Fall 0**, so sind wir fertig nach Lemma 1, wir wählen $\alpha_i = v(x_i)$ und $\gamma = v(a_r)$ sowie $q(X) = \mathrm{ac}(a_r)X^r$ und $b_i := \mathrm{ac}(x_i)$.

Angenommen, $(x_i)_i$ ist wie in **Fall 1**. Es gibt ein Polynom $DP(Y) \in K[Y]$ mit $P(x_0+Y) = P(x_0) + DP(Y)$. Für $0 < i < \omega$ ist dann $P(x_i) = P(x_0) + DP(y_i)$. Anwenden von Lemma 1 auf $(y_i)_{0<i<\omega}$ und das Polynom $P(x_0) + DP(Y)$ liefert das Ergebnis.

Sei nun $(x_i)_i$ wie im **Fall 2ii**. Schreibe $P(x_\omega + Z) = P(x_\omega) + DP_1(Z)$ und wende Lemma 1 an auf $(z_i)_{i<\omega}$ und $DP_1(Z)$.

Sei zuletzt $(x_i)_i$ wie in **Fall 2**. Schreibe $P(x_0) + DP(Y) = \sum_{k<n} a_k Y^k$ und setze $v_0 := v(y_0)$. Sei $A \subseteq \{1, \ldots, n\}$ die Menge aller $k < n$, für die $v(a_k) + kv_0$ minimal ist. Sei $q(t) := \sum_{k\in A} \mathrm{ac}(a_k)t^k \in Kv[t]$. Es gibt ein $i_* < \omega$, sodass für jedes $i > i_*$ das Element $\mathrm{ac}(y_i)$ keine Nullstelle von $q(t)$ ist. Für solche i gilt $v(P(x_i)) = v(P(x_0) + DP(y_i)) = v(a_k) + kv_0, k \in A$ und $\mathrm{ac}(P(x_i)) = \mathrm{ac}(P(x_0) + DP(y_i)) = q(\mathrm{ac}(y_i))$. Wieso? □

Beweis des Satzes von Delon. Wir erinnern uns daran, dass wir uns auf Formeln $\phi(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ mit $|\mathbf{x}| = 1$ beschränken können und dass boolesche Kombination von NIP-Formeln wieder NIP sind. Mit der partiellen Quantorenelimination in $\mathcal{L}_{\mathrm{DP}}$ müssen wir Formeln der folgenden Gestalten untersuchen:

1) $\phi(x, \mathbf{y}) = 0$ für Variablen $x, \mathbf{y}$ aus K und eine quantorenfreie $\mathcal{L}_{\mathrm{ring}}$-Formel ϕ,
2) $\psi(x, \bar{t}(\mathbf{y}))$ für eine Variable x aus vK, ein Variablentupel $\bar{y}$ aus K und vK, eine $\mathcal{L}_{\mathrm{oag}}$-Formel ψ und ein Tupel $\bar{t}$ von Termen mit Bild in vK,
3) $\pi(x, \bar{t}(\mathbf{y}))$ für eine Variable x aus Kv, einem Variablentupel $\mathbf{y}$ aus K und Kv, einer $\mathcal{L}_{\mathrm{ring}}$-Formel π und einem Tupel $\bar{t}$ von Termen mit Bild in Kv,
4) $\psi(v(P_1(x, \mathbf{y}_1)), \ldots, v(P_n(x, \mathbf{y}_1)), \mathbf{y}_2)$ für ein Variablentupel $\mathbf{y}_2$ aus vK und eine $(\mathcal{L}_{\mathrm{oag}} \cup \{\infty\})$-Formel ψ,
5) $\theta(\mathrm{ac}(P_1(x, \mathbf{y}_1)), \ldots, \mathrm{ac}(P_n(x, \mathbf{y}_1)), \mathbf{y}_2), \mathbf{y}_2$ für ein Variablentupel y_2 aus Kv und eine $\mathcal{L}_{\mathrm{ring}}$-Formel θ.

In den Fällen 1,2,3 folgt NIP daraus, dass algebraisch abgeschlossene Körper, $\mathrm{Th}(vK)$ bzw. $\mathrm{Th}(Kv)$ NIP sind.

Zu 4: Angenommen, $\phi(x, \mathbf{y}_1, \mathbf{y}_2) = \psi(v(P_1(x, \mathbf{y}_1)), \ldots, v(P_n(x, \mathbf{y}_1)), \mathbf{y}_2)$ wäre IP. Dann gibt es eine ununterscheidbare Folge $(x_i)_{i<\omega}$ und Parametertupel $\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2$ mit der Eigenschaft, dass $\phi(x_i, \mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2)$ wahr ist genau dann, wenn i gerade ist. Mit Lemma 2 finden wir eine ununterscheidbare Folge $(\alpha_i)_{i<\omega}$ von Elementen aus vK und für jedes $k \leq n$ gibt es $r_k < \omega$ und $\gamma_k \in vK$, sodass $v(P_k(x_i, \mathbf{b}_i)) = \gamma_k + r_k \cdot \alpha_i$ für genügend großes i. Wir ersetzen in ϕ schließlich $v(P_k(x, \mathbf{y}_1))$ durch den entsprechenden Term und erhielten eine IP-Formel in der Gruppe vK. *Wieso reicht das für kofinal viele i?*

Fall 5 wird analog zu Fall 4 behandelt. $\square$