

## Modelltheorie Übungsblatt 9

**Aufgabe 1.** Zeigen Sie, dass eine Theorie  $T$  genau dann total tranzendent ist, wenn für alle  $\kappa \geq |T|$ ,  $T$   $\kappa$ -stabil ist. Abziehen Sie dann, dass  $T$  genau dann schmall ist, wenn es kein konsistent Baum von Formeln gibt.

### Aufgabe 2.

- Zeigen Sie: Eine Folge von Elementen in  $(\mathbb{Q}, <)$  ist genau dann ununterscheidbar, wenn sie entweder konstant oder streng monoton wachsend oder streng monoton fallend ist.
- Seien  $K$  ein Körper und  $V$  ein unendlicher  $K$ -Vektorraum. Beschreiben Sie die ununterscheidbaren Folgen von Elementen in  $V$ .

**Aufgabe 3.** Ein *geordneter*  $\mathbb{Q}$ -Vektorraum ist ein  $\mathbb{Q}$ -Vektorraum mit einer linearen Ordnung  $<$ , sodass

$$\forall x \forall y \forall z (x < y \rightarrow x + z < y + z).$$

Sei  $\mathcal{L}_{\mathbb{G}\mathbb{Q}\mathbb{V}\mathbb{R}} := \mathcal{L}_{\mathbb{Q}\mathbb{V}\mathbb{R}} \cup \{<\}$ , und sei  $T_{\mathbb{G}\mathbb{Q}\mathbb{V}\mathbb{R}}$  die  $\mathcal{L}_{\mathbb{G}\mathbb{Q}\mathbb{V}\mathbb{R}}$ -Theorie der unendlichen geordneten  $\mathbb{Q}$ -Vektorräume.

- Zeigen Sie, dass  $T_{\mathbb{G}\mathbb{Q}\mathbb{V}\mathbb{R}}$  vollständig ist und Quantorenelimination hat.
- Zeigen Sie, dass  $\mathbb{R} \models T_{\mathbb{G}\mathbb{Q}\mathbb{V}\mathbb{R}}$  keine nicht-konstante unendliche ununterscheidbare Folge hat.
- Sei  $\mathbb{R}^* \succ \mathbb{R}$ . Beschreiben Sie eine nicht-konstante unendliche ununterscheidbare Folge in  $\mathbb{R}^*$ .

*Hinweis:* Sei  $\alpha > \mathbb{R}$ . Betrachten Sie  $(\alpha^n)_{n \in \omega}$ .

**Aufgabe 4.** Sei  $\mathfrak{M}$  eine  $\mathcal{L}$ -Struktur. Zeigen Sie: Wenn  $\mathfrak{M}$   $\kappa$ -saturiert ist, dann wird jede  $\mathcal{L}$ -Formel in  $\mathfrak{M}$  entweder von endlich vielen oder von mindestens  $\kappa$ -vielen Elementen erfüllt.

*Abgabe bis Donnerstag, den 13.12, 10:00 Uhr*

*Die Übungsblätter sollen zu zweit bearbeitet und abgegeben werden.*

*Web-Seite: <http://www.math.uni-muenster.de/u/franziska.jahnke/mt/>*