Prof. F. Jahnke
B. Boissonneau

Universität Münster
Wintersemester 2018/2019

Modelltheorie
Übungsblatt 8

Aufgabe 1. Zeigen Sie, dass die isolierten Typen in einer Theorie T genau dann dicht liegen, wenn die isolierten Typen (topologisch) dicht im Stoneraum $S_n(T)$ liegen.

Aufgabe 2. Sei $\mathcal{K}$ die Klasse der endlichen Graphen. Zeigen Sie, dass der abzählbare Zufallsgraph der Fraïssé-Limes von $\mathcal{K}$ ist.
Anmerkung: Dies ist ein alternativer Beweis für Quantorenelimination in der Theorie T_{RG}.

Sei G ein Graph, d.h. ein Modell der $\mathcal{L}_R$-Theorie T_{Gr} (siehe Blatt 6), und $n \geq 3$. Ein *n-Zykel* in G ist ein n-Tupel $(x_1, \ldots, x_n) \in G^n$, so dass

$$G \models \bigwedge_{1 \leq i < n} R(x_i, x_{i+1}) \wedge R(x_n, x_1) \wedge \bigwedge_{1 \leqslant i \leqslant n-2} \neg x_i = x_{i+2} \wedge \neg x_{n-1} = x_1 \wedge \neg x_n = x_2$$

gilt. Der Graph G heißt *zykelfrei*, falls es für kein $n \in \mathbb{N}_{>0}$ einen n-Zykel in G gibt, und heißt *dreiecksfrei*, falls es keinen 3-Zykel gibt.

Aufgabe 3. Zeigen Sie, dass die Klasse der endlichen dreiecksfreien Graphen einen Fraïssé-Limes hat, aber die Klasse der endlichen zykelfreien Graphen keinen Fraïssé-Limes hat.

Nikolausaufgabe 4. Der Nikolaus möchte dieses Jahr seine Gaben nicht selbst verteilen, sondern stattdessen abzählbar viele Wichtel einstellen, die diese Aufgabe für ihn übernehmen. Jeder Wichtel hat entweder einen weißen oder einen schwarzen Bart. Jeder Mensch darf sich wünschen, ob er seine Geschenke von einem Wichtel mit weißem Bart oder einem Wichtel mit schwarzem Bart bekommt. Keine zwei Wichtel haben die gleiche Größe. Im Wichteluniversum existiert zu jeder endlichen Folge von Bartfarben (W oder S) eine nach Größe geordnete Menge von Wichteln, so dass die Bartfarben der Wichtel der Folge entsprechen.

Um den Osterhasen zu beeindrucken, bietet der Nikolaus diesem das Folgende an: *Du darfst dir eine beliebige endliche Anzahl von Wichteln wünschen, die zu dir kommen, und du darfst dir wünschen, welche Folge von Bartfarben entsteht, wenn man die Wichtel der Größe nach ordnet.*

Der Osterhase erwidert: *Toll! Ich möchte aber auch mir noch einen weiteren Wichtel wünschen können, nachdem alle 'meine' Wichtel bei mir eingetroffen sind. Dieser soll an einer von mir bestimmten Stelle in die Größenordnung einreihen, und ich will mir aussuchen dürfen, welche Bartfarbe er hat!*

Kann der Weihnachtsmann diesen Spezialwunsch erfüllen, obwohl er die Wichtel einstellen muss, bevor er die Wünsche der Menschen und des Osterhasens erfährt?

Abgabe bis Donnerstag, den 06.12, 10:00 Uhr
Die Übungsblätter sollen zu zweit bearbeitet und abgegeben werden.
Web-Seite: `http://wwwmath.uni-muenster.de/u/franziska.jahnke/mt/`