

Modelltheorie Übungsblatt 5

Aufgabe 1. Sei \mathcal{A} eine \mathcal{L} -Struktur und $C \subset B \subset A$. Ist $\varphi(x)$ eine $\mathcal{L}(B)$ -Formel, so sei $[\varphi] = \{p(x) \in S_n^{\mathcal{A}}(B) \mid \varphi(x) \in p(x)\}$. Dann ist $\{[\varphi] \mid \varphi(x) \text{ eine } \mathcal{L}(B)\text{-Formel}\}$ clopen Basis einer kompakten Topologie auf $S_n^{\mathcal{A}}(B)$. Das bedeutet, dass diese Familie abgeschlossen unter Schnitt, Vereinigung und Komplement ist. Für $p(x) \in S_n^{\mathcal{A}}(B)$ sei $p|_C(x) = \{\phi(x) \in p(x) \mid \phi(x) \text{ eine } \mathcal{L}(C)\text{-Formel}\}$.

- Zeigen Sie, dass $p|_C \in S_n^{\mathcal{A}}(C)$ gilt.
- Zeigen Sie, dass die Abbildung $|_C : S_n^{\mathcal{A}}(B) \rightarrow S_n^{\mathcal{A}}(C)$ surjektiv und stetig ist.
- Beweisen Sie das Trennungslemma mithilfe von Aufgabe 2 von Übungsblatt 4.

Aufgabe 2. Sei K ein Körper und $\mathcal{L}_{V(K)}$ die Sprache der K -Vektorräume. Zeigen Sie, dass die $\mathcal{L}_{V(K)}$ -Theorie der unendlichen K -Vektorräume Quantorenelimination hat und vollständig ist.

Aufgabe 3. Sei \mathcal{L}_G die Sprache der Gruppen. Eine Gruppe G heißt divisibel, falls für alle $x \in G$ und alle $n \in \mathbb{N}$ es ein $y \in G$ gibt mit $\underbrace{y + y + \cdots + y}_{n \text{ mal}} = x$. Zeigen Sie, dass die \mathcal{L}_G -Theorien der divisiblen torsionsfreien abelschen Gruppen Quantorenelimination hat.
Hinweis: Jede divisible torsionsfreie abelsche Gruppe ist auf kanonische Weise ein \mathbb{Q} -Vektorraum (Warum?). Sie können also Aufgabe 2 verwenden.

Aufgabe 4. Sei $\mathcal{L} = \{R\}$. Zeigen Sie, dass die \mathcal{L} -Theorie des Zufallsgraphen T_{RG} (siehe Blatt 3) Quantorenelimination hat und vollständig ist.

Abgabe bis Donnerstag, den 15.11, 10:00 Uhr

Die Übungsblätter sollen zu zweit bearbeitet und abgegeben werden.

Web-Seite: <http://wwwmath.uni-muenster.de/u/franziska.jahnke/mt/>