Prof. F. Jahnke
B. Boissonneau

Universität Münster
Wintersemester 2018/2019

Modelltheorie
Übungsblatt 3

Aufgabe 1.

a) Sei $\mathcal{C}$ eine Klasse von $\mathcal{L}$-Strukturen. Zeigen Sie, dass $\mathcal{C}$ genau dann eine axiomatisierbare Klasse ist, wenn $\mathcal{C}$ abgeschlosssen unter elementarer Äquivalenz und Ultraprodukten ist.

b) Sei K ein Körper. Die Sprache der K-Vektorräume ist $\mathcal{L}_{V(K)} = \mathcal{L}_G \cup \{a \mid a \in K\}$. Schreiben Sie die Theorie der K-Vektorräume.

c) Zeigen Sie, dass die Klasse der K-Vektorräume endlicher dimension nicht axiomatisierbar ist.

Aufgabe 2. Zeigen Sie den Kompaktheitssatz mithilfe von Ultraprodukten: Wenn jede endliche Teilmenge einer Theorie T konsistent ist, dann ist auch T konsistent.
Hinweis: Betrachten Sie als Indexmenge I alle endlichen Teilmengen der Theorie. Finden Sie einen geeigneten Ultrafilter auf I, der für jedes $\sigma \in T$ die Menge $I_\sigma := \{\Delta \in I \,|\, \sigma \in \Delta\}$ enthält.

Aufgabe 3. Zeigen Sie, dass eine existenzielle Aussage ϕ, die in jedem endlichen Körper gilt, in jedem algebraisch abgeschlossenen Körper gilt.
Hinweis: Zeigen Sie zuerst $\phi \in T_{\mathrm{AAK}_p}$ für jede $p > 0$ und verwenden Sie Kompaktheit.
Bonusfrage (schwer): Das Gleiche gilt für $\forall\exists$-Aussagen.

Aufgabe 4.

a) Zeigen Sie, dass die Theorie der K-Vektorräume κ-kategorisch für $\kappa > |K|$ ist.

b)* Betrachten Sie die Sprache der Graphen $\mathcal{L}_R = \{R\}$, wobei R ein zweistelliges Relationssymbol ist. Wir fassen $\mathcal{L}_R$-Strukturen als Graphen auf, wobei $R(x, y)$ heißt, dass es eine Kante von x nach y gibt. Sei

$$\begin{aligned} T_{RG} = &\big\{\forall x, y\big(\big(R(x,y) \leftrightarrow R(y,x)\big) \wedge \neg R(x,x)\big) \wedge \exists x, y\big(\neg x = y\big)\big\} \\ &\cup \big\{\forall x_0, \dots, x_{m-1}, y_1, \dots, y_{n-1}\big(\bigwedge_{i \neq j} \neg x_i = y_j \to \\ &\exists z\big(\bigwedge_{i<m} R(z, x_i) \wedge \neg z = x_i\big) \wedge \big(\bigwedge_{j<n} \neg R(z, y_j) \wedge \neg z = y_j\big)\big) \;\mid\; m, n \in \mathbb{N}_{>0}\big\} \end{aligned}$$

die $\mathcal{L}_R$-Theorie des Zufallsgraphen. Zeigen Sie, dass T_{RG} $\aleph_0$-kategorisch ist.

Hinweis: Verwenden Sie die Hin-und-Her Methode.

Abgabe bis Freitag, den 02.11, 10:00 Uhr
Die Übungsblätter sollen zu zweit bearbeitet und abgegeben werden.
Web-Seite: `http://wwwmath.uni-muenster.de/u/franziska.jahnke/mt/`