Prof. F. Jahnke
B. Boissonneau

Universität Münster
Wintersemester 2018/2019

Modelltheorie
Übungsblatt 1

Aufgabe 1. Sei $\mathcal{L}_M = \{1, \cdot\}$ die Sprache der Monoide und $\mathcal{L}_G = \{1, \cdot, ^{-1}\}$ die Sprache der Gruppen.

a) Geben Sie in beiden Sprachen ein Axiomensystem für die Klasse der Gruppen an.

b) Zeigen Sie, dass $\mathcal{L}_G$-Unterstrukturen von Gruppen Gruppen sind, dagegen $\mathcal{L}_M$-Unterstrukturen nicht notwendigerweise. (Das heißt: Die Klasse der Gruppen ist in der Gruppensprache *abgeschlossen gegen Unterstrukturen*, in der Monoidsprache dagegen nicht).

c) Zeigen Sie mithilfe des Kompaktheitssatzes, dass die Klasse der endlichen Gruppen in der Sprache $\mathcal{L}_G$ nicht axiomatisierbar ist.

$(I, \leqslant)$ heißt *partielle Ordnung*, falls für alle $i, j \in I$ gibt es $k \in I$ mit $i \leqslant k$ und $j \leqslant k$. Eine Familie $(\mathcal{A}_i)_{i\in I}$ von $\mathcal{L}$-Strukturen heißt *gerichtet*, falls $(I, \leqslant)$ eine partielle Ordnung ist und für alle $i, j \in I$ mit $i \leqslant j$ schon $\mathcal{A}_i \subseteq \mathcal{A}_j$ gilt. Wenn $(I, \leqslant)$ total geordnet ist, nennen wir $(\mathcal{A}_i)_{i\in I}$ eine *Kette*.

Aufgabe 2. Sei $(I, \leqslant)$ eine partielle Ordnung und $(\mathcal{A}_i)_{i\in I}$ eine gerichtete Familie von $\mathcal{L}$-Strukturen. Ziegen Sie, dass $A = \bigcup_{i\in I} A_i$ das Universum einer eindeutig bestimmten $\mathcal{L}$-Struktur $\bigcup_{i\in I} \mathcal{A}_i$ ist, und dass für alle $i \in I$, $\mathcal{A}_i$ eine Unterstruktur von $\mathcal{A}$ ist.

Aufgabe 3. Sei $(I, \leqslant)$ eine totale Ordnung und $(\mathcal{A}_i)_{i\in I}$ eine Kette von isomorphen $\mathcal{L}$-Strukturen. Gilt dann $\bigcup_{i\in I} \mathcal{A}_i \cong \mathcal{A}_j$ für alle $j \in I$?
Hinweis: Versuchen Sie $\mathcal{A}_i \cong \mathbb{Z}$.

Aufgabe 4.

a) Sei $\mathcal{A}$ eine $\mathcal{L}$-Struktur, $D \subseteq A^n$ eine $\emptyset$-definierbare Menge und $\sigma \in \mathrm{Aut}(\mathcal{A})$ ein Automorphismus. Zeigen Sie, dass für alle $d \in D$ auch $\sigma(d) \in D$ gilt.

b) Was sind die $\emptyset$-definierbaren Teilmengen von $\mathbb{Q}$ in der Struktur $(\mathbb{Q}, <^{\mathbb{Q}})$? Und in $(\mathbb{Q}, 0^{\mathbb{Q}}, +^{\mathbb{Q}}, -^{\mathbb{Q}})$?

Abgabe bis Donnerstag, den 18.10, 10:00 Uhr
Die Übungsblätter sollen zu zweit bearbeitet und abgegeben werden.
Web-Seite: `http://wwwmath.uni-muenster.de/u/franziska.jahnke/mt/`