Prof. F. Jahnke
B. Boissonneau

Universität Münster
Wintersemester 2018/2019

Modelltheorie
Übungsblatt 0

Ein *Filter* $\mathcal{F}$ auf einer Menge I ist eine nicht-leere Familie von Teilmengen von I, so dass:

- $\mathcal{F}$ ist abgeschlossen unter endlichen Schnitten,
- jede Obermenge eines Elements von $\mathcal{F}$ ist in $\mathcal{F}$,
- $\emptyset \notin \mathcal{F}$.

Ein Filter ist ein *Ultrafilter*, wenn für jede Teilmenge $A \subset I$ entweder $A \in \mathcal{F}$ oder $I \setminus A \in \mathcal{F}$ gilt. Mit dem Auswahlaxiom kann man jeden echten Filter zu einem Ultrafilter erweiten. Sei $\mathcal{F}$ ein Ultrafilter auf I und $(\mathcal{A}_i)_{i\in I}$ eine Familie von $\mathcal{L}$-Strukturen. Betrachten Sie die folgende Äquivalenzrelation auf dem kartesischen Produkt der A_i:

$$(a_i)_{i\in I} \sim_{\mathcal{F}} (b_i)_{i\in I} \Leftrightarrow \{i \in I \mid a_i = b_i\} \in \mathcal{F}$$

$(a_i)_{\mathcal{F}}$ ist die Äquivalenzklasse von ein Element $(a_i)_{i\in I} \in \prod_{i\in I} A_i$. $\prod_{\mathcal{F}} \mathcal{A}_i$, das *Ultraprodukt* der A_i bezüglich $\mathcal{F}$, ist eine $\mathcal{L}$-Struktur mit Universum $\prod_{i\in I} A_i / \sim_{\mathcal{F}}$ definiert durch:

- Für ein Konstantensymbol $c \in \mathcal{L}$:
$$c^{\prod_{\mathcal{F}} \mathcal{A}_i} = (c^{\mathcal{A}_i})_{\mathcal{F}}$$
- Für ein n-stelliges Funktionssymbol $f \in \mathcal{L}$:
$$f^{\prod_{\mathcal{F}} \mathcal{A}_i}((a_i^1)_{\mathcal{F}}, \cdots, (a_i^n)_{\mathcal{F}}) = (f^{\mathcal{A}_i}(a_i^1, \cdots, a_i^n))_{\mathcal{F}}$$
- Für ein Relationssymbol $R \in \mathcal{L}$:
$$R^{\prod_{\mathcal{F}} \mathcal{A}_i}(a_i^1)_{\mathcal{F}}, \cdots, (a_i^n)_{\mathcal{F}} \Leftrightarrow \{i \in I \mid R^{\mathcal{A}_i} a_i^1, \cdots, a_i^n\} \in \mathcal{F}$$

Anwesenheitsaufgabe 1. Sei I eine Menge, $\mathcal{F}$ ein Ultrafilter auf I, und $(\mathcal{A}_i)_{i\in I}$ eine Familie von $\mathcal{L}$-Strukturen.

a) Zeigen Sie, dass das Ultraprodukt $\prod_{\mathcal{F}} \mathcal{A}_i$ wohldefiniert ist.
b) Sei ϕ ein $\mathcal{L}$-Formel und $(a_i^1)_{i\in I}, \cdots, (a_i^n)_{i\in I}$ Elementen von $\prod_{i\in I} A_i$. Zeigen Sie den Satz von Łoś:

$$\prod_{\mathcal{F}} \mathcal{A}_i \models \phi((a_i^1)_{\mathcal{F}}, \cdots, (a_i^n)_{\mathcal{F}}) \Leftrightarrow \{i \in I \mid \mathcal{A}_i \models \phi(a_i^1, \cdots, a_i^n)\} \in \mathcal{F}$$

Anwesenheitsaufgabe 2. Sei $\mathcal{A}$ ein $\mathcal{L}$-Struktur. Zeigen Sie die folgenden Lemmas:

a) Eine Teilmenge B von A ist genau dann Universum einer Unterstruktur $\mathcal{B} \subset \mathcal{A}$, wenn für alle Konstantensymbol $c \in \mathcal{L}$ und alle Funktionssymbol $f \in \mathcal{L}$, B alle $c^{\mathcal{A}}$ enthält und B abgeschlossen unter $f^{\mathcal{A}}$ ist.

b) Sei B ein $\mathcal{L}$-Struktur und $h : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ ein Homomorphismus. Dann ist $h(A)$ Universum einer Unterstruktur von $\mathcal{B}$.

c) Sei $\mathcal{A}'$ ein $\mathcal{L}$-Struktur, $h : \mathcal{A} \to \mathcal{A}'$ ein Homomorphismus, und $\mathcal{B}$ eine Oberstruktur von A. Dann existiert $\mathcal{B}'$ eine Oberstruktur von $\mathcal{A}'$ und eine Fortsetzung $g : \mathcal{B} \to \mathcal{B}'$.

Anwesenheitsaufgabe 3. Jede Formel ist äquivalent zu ein Formel in Prenex Normalform:

$$Q_1 x_1 Q_2 x_2 \cdots Q_n x_n \phi(x_1, \cdots, x_n)$$

mit $(Q_i)_{i=1,\cdots,n}$ Quantoren und quantorenfreiem ϕ.

Anwesenheitsaufgabe 4. Sei $\kappa > \aleph_0$. Zeigen Sie, dass T_{DLO} nicht κ-kategorisch ist.