Erinnerung:

$\mathcal{L}_{Pr} = \{0, 1, +, -, <, (P_n)_{n>1}\}$, T_{Pr} ist $\mathcal{L}_{Pr}$-Theorie, axiomatisiert durch:

(I) Axiome ang. ab. Gruppen

(II) $0 < 1 \wedge \forall x\, (x \leq 0 \vee x \geq 1)$

Bsp: $\mathbb{Z} \models T_{Pr}$

(III) für jedes $n > 1$: $\forall x\, (P_n(x) \leftrightarrow \exists z\; x \doteq nz)$

(IV) Schreibe $x \equiv_n y$ für $P_n(x-y)$. Für jedes $n > 1$:

$$\forall x \bigvee_{0 \leq i < n} \Big(x \equiv_n \ulcorner i \urcorner \wedge \bigwedge_{\substack{0 \leq j < n \\ j \neq i}} x \not\equiv_n \ulcorner j \urcorner \Big)$$

d.h. "jedes x ist mod n zu genau einem von $0, \ldots, n-1$ kongruent"

Satz 3.16: T_{Pr} ist vollständig und hat QE.

Bew: Seien $\mathcal{M}_1, \mathcal{M}_2 \models T_{Pr}$, $G \subseteq \mathcal{M}_1, \mathcal{M}_2$ endl. erzeugt

Sei $\phi(y) = \bigwedge_i \theta_i(y)$ mit $\theta_i(y)$ Basic $\mathcal{L}(G)$-Fml.

Ang. $\mathcal{M}_1 \models \exists y\, \phi(y)$, d.h. ex. $b \in \mathcal{M}_1$ $\mathcal{M}_1 \models \phi[b]$

z.z.: $\mathcal{M}_2 \models \exists y\, \phi(y)$ (dann fertig mit 3.11)

θ_i Basic $\Rightarrow$ jedes $\theta_i(y)$ ist äquivalent zu einer der folgenden Fml:

(1.) $my \doteq g$ (1'.) $my \not\doteq g$

(2.) $my \equiv_n g$ (2'.) $my \not\equiv_n g$

(3.) $my < g$ (3'.) $g < my$

für $m, n \in \mathbb{N}$ und $g \in G$.

OE: In jedem θ_i kommt das gleiche m vor.

Betrachte zu $\theta_i(y)$ die $\mathcal{L}_{Pr}$-Fml $\theta_i'(z)$ mit

$$T_{Pr} \vdash \forall y\, (\theta_i(y) \leftrightarrow \theta_i'(my))$$

z.B. $\theta_i(y) \equiv my \doteq g \Rightarrow \theta_i' \equiv z \doteq g$

Setze $\phi' = \bigwedge_i \theta_i'$ $\Rightarrow \mathcal{M}_1 \models \phi'(mb)$

(Bem: Beh. ist klar, falls ein $\theta_i(y)$ die Form $y = mg$ für ein $g \in G$ hat)

Beh 3.17: Es gibt $h \in G$ mit $G \models \phi'(h) \wedge P_m(h)$

Bew: Schreibe $\phi'(z) = \underbrace{\phi_1'(z)}_{\bigwedge \theta_i \text{ der Form (1) \& (1')}} \wedge \underbrace{\phi_2'(z)}_{\bigwedge \theta_i \text{ der Form (2) \& (2')}} \wedge \underbrace{\phi_3'(z)}_{\bigwedge \theta_i \text{ der Form (3) \& (3')}}$

$\Rightarrow$ ϕ_3' äquivalent mod T_{Pr} zu $g_1 < z < g_2$ für $g_1, g_2 \in G \cup \{\pm\infty\}$. Ang. $g_1, g_2 \in G$. [sonst ähnlich]

Fall 1: Falls es $i \in \mathbb{N}$ gibt mit $g_2 = g_1 + \ulcorner i \urcorner$

$\Rightarrow$ f.a. $g \in \mathcal{M}_1$ mit $\mathcal{M}_1 \models g_1 < g < g_2$ gilt $g \in G$

$\Rightarrow$ $g = mb \in G$ $\Rightarrow$ ~~[illegible]~~, $G \models \phi'(g) \wedge P_m(g)$

~~[illegible]~~

Fall 2: Ang. es gibt kein $i \in \mathbb{N}$ mit $g_2 = g_1 + \ulcorner i \urcorner$

~~[illegible]~~ Wähle $N \in \mathbb{N}$ mit $m \mid N$ und s.d. f.a. n, die in ϕ_2' vorkommen, auch $n \mid N$ gilt.

(IV) $\Rightarrow$ ex. unendl. viele $h \in G$ mit $h \in g_1 + \mathbb{N}_{>0}$ und $h \equiv_N mb$

$\Rightarrow$ ex. $h \in G$ mit $h \in g_1 + \mathbb{N}_{>0}$, $h \equiv_N mb$ und $G \models \phi_1'(h)$

(II) $\Rightarrow$ $h < g_2$ $\Rightarrow$ h ist wie gewünscht. $\boxtimes$ Beh.

$G \subseteq \mathcal{M}_2$ $\Rightarrow$ $h \in \mathcal{M}_2$ und $\mathcal{M}_2 \models P_m(h)$

$\Rightarrow$ ex. $b' \in \mathcal{M}_2$ mit $mb' = h$

$\Rightarrow$ $\mathcal{M}_2 \models \phi(b')$. $\boxtimes$

Korollar 3.18: $Th(\mathbb{Z}, +, <)$ ist entscheidbar

Bew: ~~[illegible]~~ Axiomensystem für T_{Pr} ist effektiv und vollständig

$\overset{\text{Logik 1}}{\Rightarrow}$ $\underbrace{T_{Pr}}_{Th(\mathbb{Z}, 0, 1, +, <, (P_n)_{n \geq 1})}$ ist entscheidbar (bzw. $\{\ulcorner \varphi \urcorner \mid \mathcal{L}_{Pr}\text{-Aussage}, T_{Pr} \vdash \varphi\}$ ist entscheidbar)

$\Rightarrow$ $Th(\mathbb{Z}, +, <)$ ist entscheidbar $\boxtimes$

§ 3.4. Modellvollständigkeit.

Def: Eine Theorie T heißt mod. vollständig, wenn f.a. $\mathcal{M}_1, \mathcal{M}_2 \models T$ mit $\mathcal{M}_1 \subseteq \mathcal{M}_2$ schon $\mathcal{M}_1 \preccurlyeq \mathcal{M}_2$ gilt.

Bem: · T $\mathcal{L}$-Theorie mit QE $\Rightarrow$ T mod. vollst.
· modellvollständige Theorien sind induktiv (2.4)

BSP: T_{ord} mit Endpunkten: $[0,1] \not\preccurlyeq [0,2]$.

Lemma 3.18 (Robinsons Test): T $\mathcal{L}$-Theorie. Dann äquivalent:
(1.) T mod. vollst.
(2.) $\mathcal{M} \subseteq \mathcal{N}$, $\mathcal{M}, \mathcal{N} \models T$, $\varphi(\bar{x})$ Ex.fml., $\bar{m} \in M$ mit $\mathcal{N} \models \varphi(\bar{m}) \Rightarrow \mathcal{M} \models \varphi(\bar{m})$.
(3.) Jede $\mathcal{L}$-Fml ist mod T äq. zu einer universellen $\mathcal{L}$-Fml.
(4.) Jede $\mathcal{L}$-Fml ist mod T äq. zu einer existenziellen $\mathcal{L}$-Fml.

Bew: (3.) $\Leftrightarrow$ (4.) klar: φ universell $\Leftrightarrow$ $\neg\varphi$ existenziell.
(1.) $\Rightarrow$ (2.) klar nach Def. von $\preccurlyeq$
(1.) $\Leftrightarrow$ (3.) 3.7.(1)
(2.) $\overset{3.7(1)}{\Rightarrow}$ Jede Existenzfml ist zu einer universellen Fml äquivalent.
$\Rightarrow$ jede universelle Fml ist zu ex. Fml äq. $^{(*)}$
Nun: $\varphi \equiv Q_1 x_1 \dots Q_n x_n\, \psi$ mit ψ q.f.

z.z.: φ existenziell (drehe alle Quantoren auf $\exists$)
Fall 1: $Q_n = \exists \Rightarrow Q_n x_n\, \psi$ existenziell.
Fall 2: $Q_n = \forall \Rightarrow Q_n x_n\, \psi$ universell $\overset{(*)}{\Rightarrow}$ äq. zu existenziell.
nur sagen

Allgemeiner $\tilde{\varphi} \equiv Qx\, \psi$ mit ψ existenziell
Fall 1: $Q = \exists \Rightarrow \tilde{\varphi}$ existenziell.
Fall 2: $Q = \forall \Rightarrow$ wähle ρ universell mit $T \vdash \forall \bar{x} (\rho(\bar{x}) \leftrightarrow \psi(\bar{x})) \Rightarrow \tilde{\varphi}$ universell
$\Rightarrow \tilde{\varphi}$ existenziell.

$\boxtimes$