Bem: φ Allformel $\Leftrightarrow$ $\varphi \sim Q_1 x_1 \dots Q_n x_n \,\rho$ $\quad \rho$ q.f.
$Q_i = \forall$ f.a. $1 \leq i \leq n$.

Analog für Existenzformel.

Lemma 3.3: Sei $h: \mathfrak{A} \to \mathfrak{B}$ Einbettung. Dann gilt f.a. Existenzfml $\phi(x_1, \dots, x_n)$ und alle $a_1, \dots, a_n \in A$

$$\mathfrak{A} \models \phi[a_1, \dots, a_n] \Rightarrow \mathfrak{B} \models \phi[h(a_1), \dots, h(a_n)]$$

Bew: Per Ind über den Aufbau von ϕ.

OE ϕ in Negationsnormalform.

Basic ϕ: Nach Def. Einbettung.

$\wedge, \vee$: trivial.

Sei $\phi(\bar{x}) = \exists y\, \rho(\bar{x}, y)$, $\mathfrak{A} \models \phi[a_1, \dots, a_n]$

$\Rightarrow$ ex. $a \in \mathfrak{A}$, $\mathfrak{A} \models \rho(\bar{a}, a)$

$\overset{\text{I.V.}}{\Rightarrow}$ $\mathfrak{B} \models \rho[h(\bar{a}), h(a)]$

$h(\bar{a}) = h(a_1), \dots, h(a_n)$

$\Rightarrow \mathfrak{B} \models \phi[h(\bar{a})]$ $\quad \boxtimes$

Analog gilt: $h: \mathfrak{A} \to \mathfrak{B}$ Einbettung, $\phi(x_1, \dots, x_n)$ universell, $a_1, \dots, a_n \in A$

$$\mathfrak{B} \models \phi[h(a_1), \dots, h(a_n)] \Rightarrow \mathfrak{A} \models \phi[a_1, \dots, a_n]$$

§ 3.2 Erhaltungssätze

Sei $\mathcal{L}$ Sprache.

Lemma 3.4 (Trennungslemma). Seien T_1, T_2 $\mathcal{L}$-Theorien, $\mathcal{H}$ Menge von $\mathcal{L}$-Aussagen, die unter $\wedge, \vee$ abg. ist und mit $\top, \bot \in \mathcal{H}$. Dann sind äquivalent:

(1.) Es gibt ein $\phi \in \mathcal{H}$ mit $T_1 \vdash \phi$ und $T_2 \vdash \neg\phi$
"ϕ trennt T_1 und T_2"

(2.) Für alle Modelle $\mathfrak{A}_1 \models T_1$ und $\mathfrak{A}_2 \models T_2$ ex. $\phi \in \mathcal{H}$ mit $\mathfrak{A}_1 \models \phi$, $\mathfrak{A}_2 \models \neg\phi$
"ϕ trennt $\mathfrak{A}_1$ und $\mathfrak{A}_2$"

Bsp: . $\mathcal{H} = \{$existenzielle $\mathcal{L}$-Aussagen$\}$
abg. unter $\wedge, \vee$, $\top \equiv \exists x\ x \doteq x \in \mathcal{H}$, $\bot \equiv \exists x\ \neg x \doteq x \in \mathcal{H}$.

. analog $\mathcal{H}' = \{$universelle $\mathcal{L}$-Aussagen$\}$
$\top \equiv \forall x\ x \doteq x$, $\bot \equiv \forall x\ \neg x \doteq x$

. $\mathcal{H} = \{$ ~~[illegible]~~ qf $\mathcal{L}$-Aussagen$\}$
abg. unter $\wedge, \vee$, $\top, \bot \in \mathcal{H}$ falls $\mathcal{L}$ ein Konstantensymbol enthält.
(andernfalls: $\mathcal{H} = \emptyset$)

Bew von 3.4: (1.) $\Rightarrow$ (2.) klar.

(2.) $\Rightarrow$ (1.): Sei $\mathfrak{A}_1 \models T_1$. Betrachte
$\mathcal{H}_{\mathfrak{A}_1} := \{\phi : \phi \in \mathcal{H}, \mathfrak{A}_1 \models \phi\}$
(2.) $\Rightarrow$ $T_2 \cup \mathcal{H}_{\mathfrak{A}_1}$ inkons.
Kompaktheit $\Rightarrow$ ex. $\mathcal{H}^0_{\mathfrak{A}_1} \subset \mathcal{H}_{\mathfrak{A}_1}$ endl., $T_2 \cup \mathcal{H}^0_{\mathfrak{A}_1}$ inkons
$\mathcal{H}$ abg. unter $\wedge$ $\Rightarrow$ ex. $\phi_{\mathfrak{A}_1} \in \mathcal{H}$: $T_2 \cup \{\phi_{\mathfrak{A}_1}\}$ inkon
Betrachte nun $T_1 \cup \underbrace{\{\neg\phi_{\mathfrak{A}_1} : \mathfrak{A}_1 \models T_1\}}_{=:\Gamma}$
$\Rightarrow$ inkons.

Kompaktheit $\Rightarrow$ ex. $\Gamma_0 \subset \Gamma$ endl., $\Gamma_0 \cup T_1$ inkons.

$\Rightarrow T_1 \vdash \neg(\bigwedge_{i=0}^{n} \neg\phi_i) = \bigvee_{i=0}^{n} \phi_i =: \phi \in \mathcal{H}$

für $\Gamma_0 = \{\neg\phi_1, \dots, \neg\phi_n\}$

$\mathcal{H}$ abg. unter $\vee$ ~~[illegible]~~

$\Rightarrow$ ~~[illegible]~~ $T_1 \vdash \phi$, $T_2 \vdash \neg\phi$ $\boxtimes$

Satz 3.5: T_1, T_2 $\mathcal{L}$-Theorien. Dann sind äquivalent:

(a) es gibt eine universelle Aussage, die T_1 und T_2 trennt

(b) Wenn $\mathfrak{A}_1 \models T_1$ und $\mathfrak{A}_2 \models T_2$, ist $\mathfrak{A}_2$ keine Unterstruktur von $\mathfrak{A}_1$.

Brauche dazu Maschinerie:

Def: Sei Δ Menge von $\mathcal{L}$-Fml, $\mathfrak{A}, \mathfrak{B}$ $\mathcal{L}$-Strukturen, $f: A \to B$ Abbildung. Wir definieren

(1.) $\mathfrak{A} \Rightarrow_\Delta \mathfrak{B} :\Leftrightarrow$ alle Aussagen $\phi \in \Delta$ mit $\mathfrak{A} \models \phi$ erfüllen auch $\mathfrak{B} \models \phi$

(2.) $f: \mathfrak{A} \to_\Delta \mathfrak{B} :\Leftrightarrow f$ präserviert die Gültigkeit von Formeln aus Δ

(d.h. $\mathfrak{A} \models \phi(\bar{a}), \phi \in \Delta \Rightarrow \mathfrak{B} \models \phi(f(\bar{a}))$)

Lemma 3.6: T $\mathcal{L}$-Theorie, $\mathfrak{A}$ $\mathcal{L}$-Struktur, Δ Menge von $\mathcal{L}$-Fml, abg. unter $\exists$-Quantifizierung, $\wedge$, und Variablen-Umbenennung.

Dann sind äquivalent:

(1.) Alle Aussagen $\phi \in \Delta$ mit $\mathfrak{A} \models \phi$ sind konsistent mit T.

(2.) Ex. $\mathfrak{B} \models T$ und Abb. $f: A \to B$ mit $f: \mathfrak{A} \to_\Delta \mathfrak{B}$.