L2: Es gilt $P \vdash REG(\Delta_{\ulcorner\psi\urcorner}, \Delta_{\ulcorner\phi\urcorner}, \Delta_{\ulcorner\phi \to \psi\urcorner})$
und $P \vdash AUS(\Delta_{\ulcorner\psi\urcorner})$

Wir argumentieren in P. Ang., es gilt $Bew(\ulcorner\phi\urcorner)$ und $Bew(\ulcorner\phi\urcorner \to \psi\urcorner)$.

Dann ex. s, m und t, n mit $\beta'(s,m) = \ulcorner\phi\urcorner$, $\beta'(t,n) = \ulcorner\phi \to \psi\urcorner$, $B(s, m+1)$ und $B(t, n+1)$.

Wähle (mit Bem ~~[illegible]~~ am Ende von §4.3) u, s.d. f.a. $i \le m+n+2$ gilt

$$\beta'(u,i) = \begin{cases} \beta'(s,i) & i \le m \\ \beta'(t, i-m-1) & \text{wenn } m < i \le m+n+1 \\ \ulcorner\psi\urcorner & \text{wenn } i = m+n+2. \end{cases}$$

Dann gilt $B(u, m+n+3)$, also $Bew(\ulcorner\psi\urcorner)$. ☒

L3: Sei ψ Σ_1-Aussage.

Beh: $P \vdash \psi \to Bew(\Delta_{\ulcorner\psi\urcorner})$

Bew: Aus (1) Σ_1-~~Au~~ Formel $\Rightarrow$ $P \vdash AUS(\Delta_{\ulcorner\psi\urcorner})$

Argumentiere nun in P:

Aus ψ ~~$\Rightarrow$~~ folgt $W_{\Sigma_1}(\Delta_{\ulcorner\psi\urcorner})$ nach 4.22

Wähle s mit $\beta'(s,0) = \ulcorner\psi\urcorner$.

Dann gilt $B(s,1)$. Mit $AUS(\ulcorner\psi\urcorner)$ folgt $Bew(\ulcorner\psi\urcorner)$.

L3 folgt, da $Bew(\Delta_{\ulcorner\phi\urcorner})$ eine Σ_1-Aussage ist! ☒

~~[illegible]~~ Sei nun F eine L_N-Formel, deren Negation allgemeingültig ist. Setze $CON_P = \neg Bew(\Delta_{\ulcorner F\urcorner})$.

Satz 4.24. CON_P ist wahr, aber in P unbeweisbar.

Lemma 4.25: (1) $P \vdash \phi \to \psi \Rightarrow P \vdash Bew(\ulcorner\phi\urcorner) \to Bew(\ulcorner\psi\urcorner)$

(2.) $P \vdash Bew(\ulcorner\phi \wedge \psi\urcorner) \leftrightarrow Bew(\ulcorner\phi\urcorner) \wedge Bew(\ulcorner\psi\urcorner)$

Bew: siehe Bew. 2.38. (ersetze ZFC durch P)

Bew von 4.24:

Sei ϕ Fml mit $P \vdash \phi \leftrightarrow \neg Bew(\ulcorner\phi\urcorner)$ (*)

(ex. nach 4.14)

Beh: Es gilt $P \vdash \phi \leftrightarrow CON_P$

Bew: Es gilt $P \vdash F \to \phi$ ~~wobei [illegible]~~

$\overset{4.25(1)}{\Rightarrow}$ $P \vdash Bew(\ulcorner F\urcorner) \to Bew(\ulcorner\phi\urcorner)$

(*) also $P \vdash \phi \to \underbrace{\neg Bew(\ulcorner F\urcorner)}_{CON_P}$

Andererseits: $P \vdash \phi \to \neg Bew(\ulcorner\phi\urcorner)$

$\overset{4.25(1)}{\Rightarrow}$ $P \vdash Bew(\ulcorner\phi\urcorner) \to Bew(\ulcorner\neg Bew(\ulcorner\phi\urcorner)\urcorner)$

L3 $P \vdash Bew(\ulcorner\phi\urcorner) \to Bew(\ulcorner Bew(\ulcorner\phi\urcorner)\urcorner)$

d.h. $P \vdash Bew(\ulcorner\phi\urcorner) \to Bew(\ulcorner\neg Bew(\ulcorner\phi\urcorner)\urcorner) \wedge Bew(\ulcorner Bew(\ulcorner\phi\urcorner))$

4.25(2.) $\Rightarrow$ $P \vdash Bew(\ulcorner\neg Bew(\ulcorner\phi\urcorner)\urcorner) \wedge Bew(\ulcorner Bew(\ulcorner\phi\urcorner)) \to Bew(\ulcorner F\urcorner)$.

Also $P \vdash CON_P \to \neg Bew(\ulcorner\phi\urcorner)$

d.h. $P \vdash CON_P \to \phi$. ☒ Beh.

Ang. $P \vdash CON_P$ dann folgt $P \vdash \phi$

L1 $\Rightarrow$ $P \vdash Bew(\ulcorner\phi\urcorner)$

(*) $\Rightarrow$ $P \vdash \neg Bew(\ulcorner\phi\urcorner)$

$\Big\} \Rightarrow$ P inkons. ↯ da $N \models P$. ☒

Satz 4.22 (Erinnerung): Es gibt eine Σ_1-Fml $W_{\Sigma_1}(x)$, s.d. für alle Σ_1-Aussagen ϕ gilt:

$P \vdash \phi \leftrightarrow W_{\Sigma_1}(\Delta\ulcorner\phi\urcorner)$

Beweisskizze:

Genügt den Satz für Σ_1-Fml im engeren Sinne zu beweisen (siehe Def Σ_1-Fml & Bem. danach)

Ab jetzt: Alle Σ_1-Fml im Beweis sind Σ_1-Fml im engeren Sinne.

Für eine endl. Folge σ von natürlichen Zahlen schreibe $(\sigma)_i$ für das i-te Folgenglied.

Sei $\phi(v_0, \dots, v_{s-1})$ eine Σ_1-Fml im engeren Sinne. und σ eine Folge der Länge s.

Frage: Wann trifft ϕ auf σ zu?

Einfach falls ϕ eine der "Σ_1-Grundfmln"

(i) Wenn $\phi = 0 \doteq v_i$ ist, ist $0 = (\sigma)_i$

(ii) Wenn $\phi = S(v_i) \doteq v_j$ ist, ist $(\sigma)_i + 1 = (\sigma)_j$

(iii) Wenn $\phi = v_i + v_j \doteq v_k$ ist, ist $(\sigma)_i + (\sigma)_j = (\sigma)_k$

(iv) Wenn $\phi = v_i \cdot v_j \doteq v_k$ ist, ist $(\sigma)_i \cdot (\sigma)_j = (\sigma)_k$

(v) Wenn $\phi = v_i \doteq v_j$ ist, ist $(\sigma)_i = (\sigma)_j$

(vi) Wenn $\phi = \neg v_i \doteq v_j$ ist, ist $(\sigma)_i \neq (\sigma)_j$

(vii) Wenn $\phi = v_i < v_j$ ist, ist $(\sigma)_i < (\sigma)_j$

(viii) Wenn $\phi = \neg v_i < v_j$ ist, ist $(\sigma)_i \not< (\sigma)_j$

Nun: Σ_1-Fml entstehen aus ϕ wie oben durch Anwenden von $\wedge, \vee, \exists v_i, \forall v_i < v_j$

$\rightarrow$ Zerlege ϕ in 'einfachere Fmln'.

ϕ trifft auf σ genau dann zu, wenn es eine Folge $\phi_0, \dots, \phi_N$ von Σ_1-Fmln gibt und eine Folge $\sigma_0, \dots, \sigma_N$ von endl. Folgen, s.d. $\phi_N = \phi$, $\sigma_N = \sigma$ und f.a. $n \leq N$ gilt:

- Wenn s_n die Länge von σ_n ist, kommen höchstens $v_0, \dots, v_{s_n - 1}$ frei in ϕ_n vor
- Wenn ϕ_n eine Σ_1-Grundfml ist, ~~gelten gilt die zugehörige~~ erfüllt σ_n die zugehörige Bedingung (s.o.)

- Wenn $\phi_n = \phi' \wedge \phi''$ ist, ex. $n', n'' < n$ mit
  $\phi_{n'} = \phi'$ und $\phi_{n''} = \phi''$
  und $\sigma_{n'} = \sigma_{n''} = \sigma_n$
- Wenn $\phi_n = \phi' \vee \phi''$ ist, ex. $n' < n$ mit
  $\phi_{n'} = \phi'$ und $\sigma_{n'} = \sigma_n$
  oder $n'' < n$ mit $\phi_{n''} = \phi'$ und $\sigma_{n''} = \sigma_n$
- Wenn $\phi_n = \exists v_i \, \phi'$ ex. $n' < n$ mit $\phi_{n'} = \phi'$
  und $(\sigma_{n'})_k = (\sigma_n)_k$ f.a. k mit
  $k < \min(s_n, s_{n'})$ und $k \neq i$
- Wenn $\phi_n = \forall v_i < v_j \, \phi'$ ex. ~~recen~~ f.a. $b < (\sigma_n)_i$
  ein $n' < n$ mit $\phi_{n'} = \phi'$ und
  $(\sigma_{n'})_i = b$ und $(\sigma_{n'})_k = (\sigma_n)_k$ f.a.
  $k < \min(s_n, s_{n'})$ und $k \neq i$.

Nun: ~~Vera~~ Zerlegung von Σ_1-Fmln in ihre Bestandteile ist p.r.
(etwa $\{ \ulcorner \forall v_i < v_j \, \phi' \urcorner : i, j \in \mathbb{N}, \phi' \; \Sigma_1\text{-Fml} \}$ ist p.r.
$f(\ulcorner \forall v_i < v_j \, \phi' \urcorner) = i$ ist p.r.
$g(\ulcorner \forall v_i < v_j \, \phi' \urcorner) = j$ ist p.r.
$h(\ulcorner \forall v_i < v_j \, \phi' \urcorner) = \ulcorner \phi' \urcorner$ ist p.r.)

$\overset{4.18}{\Rightarrow}$ alles Σ_1-def.bar

Beschreibe endl. Folgen mit β' und erhalte Σ_1-Fml. $W'_{\Sigma_1}(f, a)$, s.d. f.a. Σ_1-Fml $\phi = \phi(v_0, \dots, v_{s-1})$

$$P^* \vdash \forall a \left(\phi(\beta'(a, \Delta_0), \dots, \beta'(a, \Delta_{s-1})) \leftrightarrow W'_{\Sigma_1}(\Delta_{\ulcorner \phi \urcorner}, a) \right)$$

(per Ind. über den Aufbau von ϕ)

es gibt Folgen von Fmln und Folgen von Var., die bezeugen, dass ϕ auf $\beta'(a, \Delta_0), \dots, \beta'(a, \Delta_{s-1})$ zutrifft.

Setze $W_{\Sigma_1}(x) = W'_{\Sigma_1}(x, \underline{0})$ $\boxtimes$