Beweis von 4.18:

Grundfunktionen & Regel (R1) wie im Beweis von 4.1.

z: Σ_1^P-Fkt sind unter (R2) abg., d.h.:

seien g, h definiert durch Σ_1^P-Fkt. G, H; f gegeben durch $f(\bar{x}, 0) = g(\bar{x})$, $f(\bar{x}, y+1) = h(\bar{x}, y, f(\bar{x}, y))$

z: f ist Σ_1^P-Fkt.

Zeige zuerst: Γ_f wird durch eine Σ_1-Fml ϕ definiert:

Betrachte dazu $\phi(\bar{x}, y, z) = \exists a, b\ \psi(\bar{x}, y, z, a, b)$

mit $\psi(\bar{x}, y, z, a, b) = (\beta(a, b, 0) = G(\bar{x}) \wedge$
$\forall u < y\ \beta(a, b, u+1) = H(\bar{x}, u, \beta(a, b, u))$
$\wedge\ z = \beta(a, b, y))$

Beh: ϕ ist eine Σ_1^P-Fml.

Bew: Per Induktion über y (in P^*)

Sei $y = 0$. Nach 4.19 ex. a, b mit $\beta(a, b, 0) = G(\bar{x})$

Also gilt $\phi(\bar{x}, 0, z) \rightarrow G(\bar{x}) = z$

Da G Σ_1^P-Fkt folgt $P^* \vdash \exists! z\ \phi(\bar{x}, \underline{0}, z)$.

- $y \rightsquigarrow y+1$

Zeige zuerst: ex. z mit $\phi(\bar{x}, y+1, z)$

Wähle nach I.V. $\tilde{z}$ mit $\phi(\bar{x}, y, \tilde{z})$ und $\tilde{a}, \tilde{b}$ mit $\psi(\bar{x}, y, \tilde{z}, \tilde{a}, \tilde{b})$

4.19 $\Rightarrow$ ex. a, b mit $\forall u \leq y\ \beta(\tilde{a}, \tilde{b}, u) = \beta(a, b, u)$
und $\beta(a, b, y+1) = H(\bar{x}, y, \tilde{z}) = z$.

Dann gilt $\psi(\bar{x}, y+1, z, a, b)$ und daher $\phi(\bar{x}, y+1, z)$

Sei nun z' mit $\phi(\bar{x}, y+1, z')$ z: $z = z'$.

Dann ex a, b mit $\psi(\bar{x}, y+1, z', a, b)$. Sei $u = \beta(a, b, y)$

Wg. $\psi(\bar{x}, y, u, a, b)$ folgt $u = \tilde{z}$ nach I.V.

Nun gilt $z' = H(\bar{x}, y, u) = H(\bar{x}, y, \tilde{z}) = z$

wg. H Σ_1^P-Fkt. $\boxtimes$

Def./Bem. 4.20: Wir betrachten die folgende Variante der Gödelschen β-Fkt:

$$\beta'(a,i) = \beta(\beta_1^2(a), \beta_2^2(a), i)$$

Dann gilt: $\beta' : \mathbb{N}^2 \to \mathbb{N}$ ist Σ_1^0-Fkt.
und $P^* \vdash \forall a, c, i \; \exists a' \; (\forall j < i \;\; \beta'(a,j) = \beta'(a',j)$

$$\wedge \; c = \beta'(a', i))$$

Bew: wie in 4.19.

§ 4.4 Der zweite Gödelsche Unvollständigkeitssatz.

Def: Sei $\phi(\bar{x})$ L-Fml, T L-Theorie. Wir sagen $\phi(\bar{x})$ folgt logisch aus T, wenn $\forall \bar{x} \, \phi(\bar{x})$ in allen Modellen von T gilt (d.h. $T \models \forall \bar{x} \, \phi(\bar{x})$)

Lemma 4.21 (Deduktionslemma): Sei T eine L-Theorie. Eine L-Fml $\phi(\bar{x})$ folgt genau dann logisch aus T, wenn ϕ im Hilbertkalkül aus den Axiomen von T herleitbar ist.

Bew "$\Rightarrow$" Ang. $\phi(\bar{x})$ folgt logisch aus T.
Vollständigkeitssatz $\Rightarrow$ $T \vdash \forall \bar{x} \, \phi(\bar{x})$, d.h. es ex. Axiome $\psi_1, \dots, \psi_n \in T$ s.d. $\psi_1 \wedge \dots \wedge \psi_n \to \forall \bar{x} \, \phi(\bar{x})$ im HK beweisbar ist.
$\Rightarrow$ ϕ ist im HK aus $\psi_1, \dots, \psi_n$ und $\psi_1 \wedge \dots \wedge \psi_n \to \forall \bar{x} \, \phi(\bar{x})$ herleitbar (mittels $\forall$-QA).

"$\Leftarrow$" Per Ind. über die Länge der Herleitung von ϕ.
Klar, wenn ϕ logisches Axiom oder Axiom von T ist.
MP & $\exists$-Einführung führen Fml, die logisch aus T folgen, wieder in solche über. ☑

Nun: Definiere Beweisbarkeitsprädikat.
Wir beschreiben die p.r. Relationen
$AUS = \{\ulcorner\varphi\urcorner : \varphi\ L_N\text{-Aussage}\}$ (vgl. 3.16)
$AX_P = \{\ulcorner\varphi\urcorner : \varphi\ L_N\text{-Fml}, \varphi$ ist logisches Axiom oder Axiom von $P\}$ (vgl. 3.19)
$REG = \{(\ulcorner\varphi\urcorner, \ulcorner\psi\urcorner, \ulcorner\chi\urcorner) : \varphi, \psi, \chi\ L_N\text{-Fml}, \varphi$ folgt aus ψ & χ mittels einer Regel des HK$\}$
durch Σ_1-Fmln.

Betrachte nun die Σ_1-Fml
$B'(s,n) = \forall i<n\ (Ax(\beta'(s,i)) \vee \exists j,k<i\ Reg(\beta'(s,i), \beta'(s,j), \beta'(s,k))$
Dann definiert $B'(s,n)$ in $\mathcal{N}$ die Menge der Paare (s,n), s.d. für φ L_N-Fml mit $\ulcorner\varphi\urcorner = s$
$\beta'(s,0), \dots, \beta'(s,n-1)$ eine Herleitung von φ aus den Axiomen von P im HK codiert.

Definiere (vorläufig)
$Bew'(f) = AUS(f) \wedge \exists n,s\ (\beta'(n,s) = f \wedge B'(s, n+1))$.
In $\mathcal{N}$ definiert dies die Menge der Gödelnummern der in P beweisbaren Aussagen. (4.21)
Wir wollen das gleiche in $\mathcal{M} \models P$. (d.h. wir wollen, dass Bew die Loebaxiome erfüllt).

Trick: Erweitere P um alle wahren Σ_1-Aussagen
(jede davon ist nach 4.8 schon in P beweisbar
$\rightsquigarrow$ 'nix neues' beweisbar!)

Satz 4.22: Es gibt eine Σ_1-Fml. $W_{\Sigma_1}(x)$, s.d. f.a. Σ_1-Aussagen ϕ gilt:

$$P \vdash \phi \longleftrightarrow W_{\Sigma_1}(\Delta_{\ulcorner\phi\urcorner})$$ [Bew später]

Bem: Für L_N-Aussagen ist Wahrheit nicht def.bar (vgl. Korollar 2.37)

· Die Menge der Gödelnummern von Σ_1-Aussagen ist p.r., daher gilt OE

$$P \vdash \neg W_{\Sigma_1}(\Delta_n)$$

wenn n nicht die Gödelnummer einer Σ_1-Aussage ist.

Wir definieren nun

$$B(s,n) = \forall i<n \,(W_{\Sigma_1}(\beta'(s,i)) \vee Ax_P(\beta'(s,i)) \vee \exists j,k<i \; REG(\beta'(s,i), \beta'(s,j), \beta'(s,k)))$$

und

$$Bew(f) = AUS(f) \wedge \exists n,s \,(\beta'(s,n) \doteq f \wedge B(s,n+1))$$

<u>In $\mathcal{N}$</u> definiert nun Bew die Menge der Gödelnummern der in P beweisbaren Aussagen.

Lemma 4.23: Bew(x) erfüllt die Loeb-Axiome:

L1: $P \vdash \phi \Rightarrow P \vdash Bew(\Delta_{\ulcorner\phi\urcorner})$

L2: $P \vdash Bew(\Delta_{\ulcorner\phi\urcorner}) \wedge Bew(\Delta_{\ulcorner\phi\to\psi\urcorner}) \to Bew(\Delta_{\ulcorner\psi\urcorner})$

L3: $P \vdash Bew(\Delta_{\ulcorner\phi\urcorner}) \to Bew(\Delta_{\ulcorner Bew(\Delta_{\ulcorner\phi\urcorner})\urcorner})$

Bew L1: $P \vdash \phi \Rightarrow \mathcal{N} \models Bew(\Delta_{\ulcorner\phi\urcorner})$

$Bew(\Delta_{\ulcorner\phi\urcorner})$ ist Σ_1-Fml. $\overset{4.8}{\Rightarrow} P \vdash Bew(\Delta_{\ulcorner\phi\urcorner})$