Korollar 4.10: Q ist unentscheidbar. Jede wahre Erweiterung von Q^* ist unentscheidbar.

<u>Bew</u>: Sei $R(x)$ r.a. und definiert durch die Σ_1-Fml ϕ. Sei $T \supset Q^*$ wahre Erweiterung. Dann gilt f.a. $a \in \mathbb{N}$:

$$R(a) \Rightarrow \mathcal{N} \models \phi(a) \Rightarrow Q^* \vdash \phi(\Delta_a) \Rightarrow T \vdash \phi(\Delta_a)$$

$$\neg R(a) \Rightarrow \mathcal{N} \not\models \phi(a) \qquad\qquad \Rightarrow T \nvdash \phi(\Delta_a)$$

Ang. T entscheidbar $\Rightarrow$ R rekursiv ↯ zu 3.13 ☑

Satz 4.11 (Church): Der Prädikatenkalkül ist unentscheidbar. Es gibt eine endl. Sprache L, für die

$$\{\phi : \phi \text{ allg. gültige } L\text{-Fml}\}$$

nicht rekursiv ist.

Bew: Q unentscheidbar & endl. axiomatisiert

ÜA $\Rightarrow$ die leere L_N-Theorie ist unentscheidbar

$\Rightarrow$ kann $L = L_N$ wählen. ☑

Def: Sei T L_N-Theorie und $f: \mathbb{N}^n \to \mathbb{N}$ Fkt. Die Formel $\phi(x_1, \dots, x_n, x_0)$ repräsentiert f in T, wenn f.a. $a_0 = f(a_1, \dots, a_n)$ gilt:

$$T \vdash \forall x \, (x \doteq \Delta_{a_0} \leftrightarrow \phi(\Delta_{a_1}, \dots, \Delta_{a_n}, x))$$

Bem: Sei T wahre L_N-Theorie, $\phi(x_1, \dots, x_n, x_0)$ repräsentiert f $\Rightarrow$ f wird durch ϕ definiert. "arithmetisch"

Wenn ϕ Σ_1-Fml. ist und T wahre Σ_1-Fmln beweist, dann repräsentiert ϕ die Fkt f gdw. f durch ϕ definiert wird und f.a. $a_1, \dots, a_n \in \mathbb{N}$ gilt:

$$T \vdash \forall x_0, x_0' \, (\phi(\Delta_{a_1}, \dots, \Delta_{a_n}, x_0) \wedge \phi(\Delta_{a_1}, \dots, \Delta_{a_n}, x_0') \to x_0 \doteq x_0')$$

T wahr & effektiv axiomatisierbar, f in T von ϕ repräsentierbar $\Rightarrow$ f rekursiv (denn $a_0 = f(a_1, \dots, a_n) \Leftrightarrow T \vdash \phi(\Delta_{a_1}, \dots \Delta_{a_n}, \Delta_{a_0})$ ist dann rek. aufzählbar)

Lemma 4.12: Jede rekursive Fkt. lässt sich in Q^* durch eine Σ_1-Fml repräsentieren.

Bew: Wie der Bew. von Lemma 4.1, außer für R3:

Sei $g: \mathbb{N}^{n+1} \to \mathbb{N}$, $f: \mathbb{N}^n \to \mathbb{N}$ $f(\bar{x}) = \mu y\, g(\bar{x}, y) = 0$

Sei $g(\bar{x}, y) = z$ in Q^* repräsentiert durch $\phi(\bar{x}, y, z)$. Dann wird f definiert durch

$\psi(\bar{x}, z) = \alpha(\bar{x}, z) \wedge \beta(\bar{x}, z) \wedge \gamma(z)$, mit

$\alpha(\bar{x}, z) = \phi(x, z, \underline{0})$ "$g(x, z) = 0$"

$\beta(\bar{x}, z) = \forall u < z\, \exists y (\neg \underline{0} = y \wedge \phi(\bar{x}, z, y))$ "$\forall u < z\; g(\bar{x}, z) \neq 0$"

$\gamma(z) = (\underline{0} \leq z \wedge \forall u < z\; S(u) \leq z)$ "z und Nachfolger vertragen sich"

(Schreibe hier $s \leq t$ für $s = t \vee s < t$)

Nun gilt: $\alpha \wedge \beta$ ist die im Beweis von 4.9 benutzte Fml, $\gamma(z)$ trifft in $\mathfrak{N}$ auf jedes Elem. zu

$\Rightarrow$ f wird durch $\psi(\bar{x}, z)$ definiert.

Sei $\bar{a} \in \mathbb{N}^n$, $b = f(\bar{a})$

z.z.: $Q^* \vdash \forall z (\psi(\Delta_{\bar{a}}, z) \to z = \Delta_b)$

Es gilt: $Q^* \vdash \forall u (\exists y (\neg \underline{0} \doteq y \wedge \phi(\Delta_{\bar{a}}, u, y)) \leftrightarrow \neg \phi(\Delta_{\bar{a}}, u, \underline{0}))$

Wir argumentieren in Q^*. Ang.: $\psi(\Delta_{\bar{a}}, z)$ gilt.

Dann folgt $\gamma(z)$. Per Induktion erhalte: entweder $0 < z, \dots, b-1 < z,\ b < z$ oder es gilt $z \doteq n$ für ein $n \in \{0, \dots, b\}$.

falls $z > b \Rightarrow \alpha(\bar{a}, b)$ und $\beta(\bar{a}, z)$ widersprechen sich.

falls $z \in \{0, \dots, b-1\}$ folgt $z < b$ & $\alpha(\bar{a}, z)$ widerspricht $\beta(\bar{a}, b)$ $\Rightarrow z = b$ □

Korollar 4.13: Jede rekursive Relation wird ~~durch~~ in Q^* von einer Σ_1-Fml ϕ repräsentiert. Das heißt:

$$R(a_1,\dots,a_n) \Rightarrow Q^* \vdash \phi(\Delta_{a_1},\dots,\Delta_{a_n})$$
$$\neg R(a_1,\dots,a_n) \Rightarrow Q^* \vdash \neg\phi(\Delta_{a_1},\dots,\Delta_{a_n}).$$

Bew: Sei χ_R repräsentiert von ρ. Setze

$$\phi(x_1,\dots,x_n) = \rho(x_1,\dots,x_n,0).$$ ☒

Satz 4.14 (Fixpunktsatz) Zu jeder L_N-Fml $\psi(v_0)$ gibt es eine L_N-Aussage ϕ mit

$$Q^* \vdash \phi \leftrightarrow \psi(\Delta_{\ulcorner\phi\urcorner})$$

Wenn $\psi(v_0)$ eine Σ_1-Fml ist, kann auch ϕ als Σ_1-Fml gewählt werden.

Bew: Lemma 3.17 $\Rightarrow$ das Einsetzen von Termen

$Subst_T(n, \ulcorner s\urcorner, \ulcorner\phi\urcorner) = \ulcorner\phi\frac{s}{v_n}\urcorner$ ist p.r.

Sei $Subst_F(0, \ulcorner s\urcorner, \ulcorner\phi\urcorner)$ in Q^* repräsentiert durch die Σ_1-Fml. σ. Dann gilt f.a. $\phi(v_0)$ und $a\in\mathbb{N}$:

$$Q^* \vdash \forall x\,(x \doteq \Delta_{\ulcorner\phi(\Delta_a)\urcorner} \leftrightarrow \sigma(\Delta_a, \Delta_{\ulcorner\phi(v_0)\urcorner}, x))$$

Setze

$$\rho(v_0) = \exists x_0\,(\psi(x_0) \wedge \sigma(v_0, v_0, x_0))$$

Dann gilt f.a. $\chi(v_0)$

$$Q^* \vdash \rho(\Delta_{\ulcorner\chi(v_0)\urcorner}) \leftrightarrow \psi(\Delta_{\ulcorner\chi(\Delta_{\ulcorner\chi(v_0)\urcorner})\urcorner})$$

Setze nun $\chi = \rho$ ein

$$Q^* \vdash \rho(\Delta_{\ulcorner\rho(v_0)\urcorner}) \leftrightarrow \psi(\Delta_{\ulcorner\rho(\Delta_{\ulcorner\rho(v_0)\urcorner})\urcorner})$$

Setze $\phi = \rho(\Delta_{\ulcorner\rho(v_0)\urcorner})$. ☒

Korollar 4.15: Jede konsistente Erweiterung von Q^* ist unentscheidbar. Insbesondere ist jede mit Q konsistente L_N-Theorie unentscheidbar.

Bew: ÜA, vgl. Bew. von 1. GUS in ZFC (2.40).

§4.3: Peanoarithmetik.

Def: Die Axiome der Peanoarithmetik P bestehen aus den Axiomen von Q sowie dem Induktionsschema:

$$\forall x_1, \ldots, x_n \left[\left(\phi(\bar{x}, \underline{0}) \wedge \forall x \left(\phi(\bar{x}, y) \to \phi(\bar{x}, S(y)) \right) \right) \to \forall y\, \phi(\bar{x}, y) \right]$$

Bem: $\mathcal{N}$ ist ein Modell von P.
$\mathcal{M} \models Q$ ist Modell von P, wenn jede durch eine Fml def-bare Menge, die $\underline{0}$ enthält und unter S abg. ist, schon ganz $\mathcal{M}$ enthält.

Lemma 4.16: Die folgenden Aussagen folgen aus P

1. S ist injektiv, jedes Element außer $\underline{0}$ hat einen Vorgänger.
2. $<$ ist eine lineare Ordnung, $\underline{0}$ ist das kleinste Element, $S(x)$ ist der unmittelbare Nachfolger von x.
3. $+, \cdot$ definieren einen komm. Halbring mit Nullelement $\underline{0}$ und Einselement Δ_1.
4. $+$ und $\cdot$ sind monoton. Es gilt
   $$x \leq y \leftrightarrow \exists z\ x + z = y.$$

Bew: Übung oder siehe Ziegler.

$\rightsquigarrow$ Elementare ZT lässt sich in P betreiben. (★)

Bem: Nach 4.10 ist P unentscheidbar
$\to$ genug Arbeit für Zahlentheoretiker!

Lemma 4.17: (verallgemeinerte Induktion). In P ist beweisbar:

$$\forall x_1, \dots x_n \left[\forall y \left(\forall z < y \ \phi(\bar{x}, z) \to \phi(\bar{x}, y) \right) \to \forall y \, \phi(\bar{x}, y) \right]$$

Intuitiv: Jede nicht-leere in einem Modell von P def.bare TM hat ein kleinstes Element.

Bew: Seien $x_1, \dots x_n$ fest gewählt. Ang. es gilt

$\mathcal{M} \models \forall y \left(\forall z < y \ \phi(\bar{x}, z) \to \phi(\bar{x}, y) \right)$ mit $\mathcal{M} \models P$

Sei $A \subset M$ die Menge aller y mit $\forall z < y \ \phi(\bar{x}, z)$.

$\Rightarrow \underline{0} \in A$, und falls $y \in A$ folgt $\phi(\bar{x}, y)$ und damit $S(y) \in A$. $\Rightarrow A = M$. $\boxtimes$

Wir führen nun neue Funktionssymbole für Σ_1-Fml ein, die in P Funktionen definieren.

Sei $\phi(v_1, \dots v_n, v_0)$ eine Σ_1-Fml, die in P eine Fkt. definiert, d.h.

$$P \vdash \forall v_1, \dots v_n \ \exists! v_0 \ \phi(v_1, \dots v_n, v_0).$$

Führe für jedes solche ϕ ein neues Fkt.zeichen F_ϕ ein, und sei L^* die resultierende Erweiterung von L und sei

$$P^* = P \cup \{ \forall v_1, \dots v_n \ \phi(v_1, \dots v_n, F_\phi(v_1, \dots v_n)) : \phi \text{ wie oben} \}$$

die entsprechende definitorische Erweiterung von P (siehe Satz 2.4). Wir nennen F_ϕ eine Σ_1^P-Funktion.

Bem: Nach 2.4. ist jede L^*-Fml. in P^* zu einer L_N-Fml. äquivalent, es gilt also das Ind.schema in P^* für L^*-Fmln. Es wird sogar jede Σ_1-Fml. aus L^* in eine Σ_1-Fml aus L_N übersetzt (vgl. Bew. 2.4)

$\Rightarrow P^{**} = P^*$

jedes F_ϕ definiert Fkt $\mathbb{N}^n \to \mathbb{N}$, diese wird in P^* durch $v_0 = F_\phi(v_1, \dots, v_n)$ repräsentiert und in P durch ϕ.

Satz 4.18: Jede prim. rekursive Fkt ist durch eine Σ_1^P-Funktion def.bar

Lemma 4.19:

(i) Die Gödelsche β-Fkt ist durch eine Σ_1^P-Fkt def.bar (diese bezeichnen wir auch mit β)

(ii) Für diese Fkt gilt

$$P^* \vdash \forall a, b, c, i \; \exists a', b' \; (\forall j < i \;\; \beta(a,b,j) \doteq \beta(a',b',j) \wedge c \doteq \beta(a',b',i))$$

Erinnerung: $\beta(a,b,i)$ ist rekursive Fkt mit der folgenden Eigenschaft: $\forall$ endl. Folgen $c_0, \dots, c_{n-1}$ ex. a, b mit $\beta(a,b,i) = c_i$ für $i = 0, \dots, n-1$.

Bew von 4.19:

(i) Nach dem Bew. von 3.9 wird $\beta(a,b,i)$ von der Σ^1-Fml.

$$\phi(v_1, v_2, v_3, v_0) = (v_0 < v_2(v_3+1)+1 \wedge \exists y \; v_1 \doteq v_0 + y(v_2(v_3+1)+1))$$

(ii) Die Eigenschaft ist wahr (setze $c_0 = \beta(a,b,0), \dots, c_{i-1} = \beta(a,b,i-1), c_n = c$ $\rightsquigarrow$ erhalte a', b')

Nach $(\star)$ lässt sie sich also in P^* beweisen. ☑