§4.2. Das System Q

$\mathcal{L}_N = \{\underline{0}, S, +, \cdot, <\}$ $\quad \mathcal{N} = (\mathbb{N}, \underline{0}^{\mathbb{N}}, S^{\mathbb{N}}, +^{\mathbb{N}}, \cdot^{\mathbb{N}}, <^{\mathbb{N}})$

Wir betrachten das folgende Axiomensystem Q:

$$\left.\begin{array}{ll} Q1 & \forall x \quad x + \underline{0} \doteq x \\ Q2 & \forall x,y \quad x + S(y) \doteq S(x+y) \end{array}\right\} \text{rek. Def. von } +$$

$$\left.\begin{array}{ll} Q3 & \forall x \quad x \cdot \underline{0} \doteq \underline{0} \\ Q4 & \forall x,y \quad x \cdot S(y) = x \cdot y + x \end{array}\right\} \text{rek. Def. von } \cdot$$

$$\left.\begin{array}{ll} Q5 & \forall x \quad \neg x < \underline{0} \\ Q6 & \forall x,y \quad x < S(y) \leftrightarrow (x \doteq y \vee x < y) \end{array}\right\} \text{rek. Def. von } <$$

Def: Sei φ eine $\mathcal{L}_N$-Aussage. Wir sagen, dass φ wahr ist, wenn $\mathbb{N} \models \varphi$ gilt

mit den üblichen Interpretationen der Symbole

Beispiel: Q ist eine wahre $\mathcal{L}_N$-Theorie

Bemerkung: Q ist eine sehr schwache Theorie. ~~Bsp~~

$Q \not\vdash \forall x \quad S(x) \neq x$, da etwa das folgende ein Model von Q ist:

$M = \mathbb{N} \cup \{\omega\}$, alle Symbole mit der üblichen Interpretation auf $\mathbb{N}$, $n <^M \omega$ f.a. $n \in \mathbb{N}$,

$\omega +^M n = n +^M \omega = \omega$ f.a. $n \in \mathbb{N}$

$n \cdot^M \omega = \omega \cdot^M n = \omega$ f.a. $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$, $\underline{0} \cdot^M \omega = \omega \cdot^M \underline{0} = \underline{0}$

$S^M(\omega) = \omega$ ist Modell von Q.

Erinnerung: Schreibe $\Delta_0 = \underline{0}$, $\Delta_{a+1} = S(\Delta_a)$

Lemma 4.5: Q1. Für alle $m, n \in \mathbb{N}$ gilt $Q \vdash \Delta_n + \Delta_m \doteq \Delta_{n+m}$

Bew: Ind. über m. $m = 0$: Q1, $m \rightsquigarrow m+1$: Q2.

Q^*2: F.a. $n, m \in \mathbb{N}$ gilt $Q \vdash \Delta_n \cdot \Delta_m \doteq \Delta_{n \cdot m}$

Bew: Ind. über m, benutze Q3 & Q4.

Q^*3: F.a. $n \in \mathbb{N}$ gilt $Q \vdash \forall x \; x < \Delta_n \leftrightarrow (x \doteq \Delta_0 \vee \ldots \vee x \doteq \Delta_{n-1})$

Bew: Ind. über n. $n = 0$: Nach Q5 ~~folgt~~

$n \rightsquigarrow n+1$: ~~...~~ Q6 und I.A.

Schreibe Q^* für die Theorie, die aus den Axiomenschemata Q^*1, Q^*2 und Q^*3 besteht, wir fassen diese als Teiltheorie von Q auf.

Ziel: zeige 1GUS für Q und Q^*

Lemma 4.6: Für alle $a, b \in \mathbb{N}$ gilt:

(i) $a \neq b \Rightarrow Q^* \vdash \neg \Delta_a \doteq \Delta_b$

(ii) $a < b \Rightarrow Q^* \vdash \Delta_a < \Delta_b$

(iii) $a \not< b \Rightarrow Q^* \vdash \neg \Delta_a < \Delta_b$.

Bew: (i) per Ind. über b. sei $b = 0$, $a \neq b$

$Q^*3 \Rightarrow Q^* \vdash \Delta_0 < \Delta_a \wedge \neg \Delta_a < \Delta_a$

$\Rightarrow Q^* \vdash \neg \Delta_0 \doteq \Delta_a$

$b \rightsquigarrow b+1$ OE $a \neq 0$, sei $a = a'+1$, $b = b'+1$

Nach I.V. gilt $Q^* \vdash \neg \Delta_{a'} \doteq \Delta_{b'}$

$Q^*1 \Rightarrow Q^* \vdash \neg \Delta_a \doteq \Delta_b$.

(ii) & (iii) sei $a < b$ $Q^*3 \Rightarrow Q^* \vdash \Delta_a < \Delta_b$.

sei $b \geq a$ $Q^*3 \Rightarrow Q^* \vdash \Delta_a < \Delta_b \leftrightarrow \bigvee_{k<b} \Delta_k \doteq \Delta_a$

Nach (i) gilt aber $Q^* \vdash \neg \Delta_k \doteq \Delta_a$ f.a. $k < b$

$\Rightarrow Q^* \vdash \neg \Delta_a < \Delta_b$. ∎

Lemma 4.7:

~~...~~ Alle wahren q.f. $L_{\mathbb{N}}$-Aussagen folgen schon aus Q^* (Terme sind nur Summen & Produkte von Δ_n's!)

Bew: Wir zeigen zuerst: Für jeden Term t ohne ~~Konstanten~~ Variablen gilt $Q^* \vdash t \doteq \Delta_{t^{\mathbb{N}}}$
Term ausgewertet in $\mathbb{N}$

Bew der Beh: Induktion über Aufbau von t.

$t = \underline{0}$: klar.

Ang. Beh. für s, t gezeigt.

Dann gilt $Q^* \vdash S(t) = S(\Delta_{t^{\mathbb{N}}})$ nach I.V.

und $S(\Delta_{t^{\mathbb{N}}}) = \Delta_{t^{\mathbb{N}}+1} = \Delta_{S(t)^{\mathbb{N}}}$

Wg $Q^* \vdash \Delta_{(t+s)^{\mathbb{N}}} = \Delta_{t^{\mathbb{N}}+s^{\mathbb{N}}}$

und $Q^* \vdash \Delta_{t^{\mathbb{N}}} + \Delta_{s^{\mathbb{N}}} = \Delta_{t^{\mathbb{N}}+s^{\mathbb{N}}}$ nach Q^*1

folgt $Q^* \vdash \Delta_{t^{\mathbb{N}}} + \Delta_{s^{\mathbb{N}}} = t + s$ nach I.V.

Multiplikation ähnlich. $\boxtimes$ Beh.

Nun zeige: Für jede q.f. L_N-Aussage φ ohne $\wedge, \neg$ gilt

$\mathbb{N} \models \varphi \Rightarrow Q \vdash \varphi$ und $\mathbb{N} \models \neg\varphi \Rightarrow Q \vdash \neg\varphi$.

Bew: $\varphi_\wedge$ Form $s < t$, $s \doteq t$

ist ~~...~~ Konj. von Teilfmln der $\neg s < t$, $\neg s \doteq t$.

$\psi = (s < t) \Rightarrow \mathbb{N} \models \psi \overset{4.6.(ii)}{\Leftrightarrow} Q \vdash \psi$

$\psi = (\neg s < t)$ $\overset{4.6.(iii)}{\Leftrightarrow}$

$\psi = (s \doteq t), \neg(s \doteq t)$ Beh. oben. $\boxtimes$

Def: Eine Σ_1-Fml. entsteht aus q.f. Fml. durch Anwenden von $\wedge, \vee, \exists x$ und beschränktem Allquantor $\forall x < t$. Hierbei ist t Term und $\forall x < t\, \phi$ steht für $\forall x\, (x < t \to \phi)$

Eine Σ_1-Fml. im engeren Sinne ~~...~~ sind die Fmln, die sich aus $\underline{0} \doteq x$, $S(x) \doteq y$, $x + y \doteq z$, $x \cdot y \doteq z$, $x \doteq y$, $\neg x \doteq y$, $x < y$, $\neg x < y$ durch Anwenden von $\wedge, \vee, \exists x, \forall x < y$ entstehen.

Bem: Jede Σ_1-Fml. ist zu einer Σ_1-Fml. im engeren Sinne äquivalent.

Bew: "Zerlege" Terme mithilfe von $\exists$-Quantoren.

Etwa $S(x) + y \doteq S(z)$ ist äquivalent zu

$$\exists x_1, z_1 \, (S(x) \doteq x_1 \wedge S(z) \doteq z_1 \wedge x_1 + y \doteq z_1)$$

Satz 4.8: Alle wahren Σ_1-Aussagen sind in Q^* beweisbar.

~~Bew~~ Zeige f.a. Σ_1-Fml. $\phi(x_1, ..., x_n)$ im engeren Sinne und alle $a_1, ..., a_n \in \mathbb{N}$, dass

$\mathbb{N} \models \phi[a_1, ..., a_n] \Rightarrow Q^* \vdash \phi(\Delta a_1, ..., \Delta a_n)$ gilt.

(Ind. über den Aufbau von ϕ)

ϕ: Primfml: Lemma 4.7

ϕ Konj. oder Disj.: ✓

Sei $\phi = \exists x \, \psi(x_0, ..., x_{n-1}, x)$

$\mathbb{N} \models \phi[a_0, ..., a_{n-1}] \Rightarrow \mathbb{N} \models \psi[a_0, ..., a_{n-1}, a_n]$ für ein $a_n \in \mathbb{N}$

$\overset{I.V.}{\Rightarrow} Q^* \vdash \psi(\Delta a_0, ..., \Delta a_n) \Rightarrow$

$Q^* \vdash \exists x \, \psi(\Delta a_0, ..., \Delta a_{n-1}, x)$

Sei $\phi = \forall x < x_{n-1} \, \psi(x_0, ..., x_{n-1}, x)$

Dann gilt $\mathbb{N} \models \psi(a_0, ..., a_{n-1}, \tilde{a}_n)$ f.a. $\tilde{a}_n < a_{n-1}$

$\overset{I.V.}{\Rightarrow} Q^* \vdash \psi(\Delta a_0, ..., \Delta a_{n-1}, \Delta \tilde{a}_n)$ f.a. $\tilde{a}_n < a_{n-1}$

$\overset{Q^* 3}{\Rightarrow} Q^* \vdash \forall x < x_{n-1} \, \phi(\Delta a_0, ..., \Delta a_{n-1})$

Lemma 4.9: Alle rekursiven Fkt. und alle rek. aufz. Relationen sind mit Σ_1-Fml. def.bar.

Bew: Kopiere Bew. von 4.1, außer für R3:

$\varphi_f(x_1, ..., x_m, x_0) := \varphi_g(x_1, ..., x_m, x_0, \underline{0}) \wedge (\forall y < x_0) \, \underbrace{\neg \varphi_g(x_1, ..., x_m, y, \underline{0})}_{\text{ersetze durch}}$

$\exists z \, (\neg \underline{0} \doteq z \wedge \varphi_g(x_1, ..., x_m, y, z))$ ☒

Korollar 4.10: Q ist unentscheidbar. Jede wahre Erweiterung von Q^* ist unentscheidbar.

Bew: Sei $R(x)$ r.a. und definiert durch die Σ_1-Fml. ϕ.
Sei T wahre Erw. von Q^*. Dann gilt f.a. $a \in \mathbb{N}$:

$R(a) \Rightarrow \mathbb{N} \models \phi(a) \Rightarrow Q^* \vdash \phi(\Delta_a) \Rightarrow T \vdash \phi(\Delta_a)$

$\neg R(a) \Rightarrow \mathbb{N} \not\models \phi(a) \overset{\text{[illegible]}}{\Longrightarrow} T \nvdash \phi(\Delta_a)$

Ang. T entscheidbar $\Rightarrow$ R rekursiv.
↯ zu 3.13 ☒

(Church)

Satz 4.11: Der Prädikatenkalkül ist unentscheidbar: Es gibt eine endl. Sprache L, für die
$$\{\phi : \phi \text{ allg.gültige } L\text{-Fml}\}$$
nicht rekursiv ist.

Bew: Q unentscheidbar & endl. axiomatisierbar
$\overset{\text{Aufgabe}}{\Rightarrow}$ Die leere L_N-Theorie ist unentscheidbar.
$\Rightarrow$ wähle $L = L_N$. ☒

Def: Sei T L_N-Theorie und $f: \mathbb{N}^n \to \mathbb{N}$ Fkt. Die Fml. $\phi(x_0, \dots, x_n)$ repräsentiert f in T, wenn f.a. $a_0 = f(a_1, \dots, a_n)$ gilt:
$$T \vdash \forall x_0 \, (x_0 \doteq \Delta_{a_0} \leftrightarrow \phi(x_0, \Delta_{a_1}, \dots, \Delta_{a_n}))$$

Bem: T wahre L_N-Theorie, $\phi(x_0, \dots, x_n)$ repräsentiert f
$\Rightarrow$ f wird durch ϕ definiert.
Wenn ϕ Σ_1-Fml. ist & T wahre Σ_1-Fmln beweist, dann repräsentiert ϕ f gdw. f durch ϕ definiert wird und f.a. $a_1, \dots, a_n$ gilt:
$$T \vdash \forall x_0, x_0' \, (\phi(x_0, \Delta_{a_1}, \dots, \Delta_{a_n}) \wedge \phi(x_0', \Delta_{a_1}, \dots, \Delta_{a_n}) \to x_0 \doteq x_0')$$