Vorlesung
Logik 1
29-6-18
1

Wiederholung:

Letzte Vorlesung:

Sei L eine Sprache mit endlicher Signatur $\{\lambda_1, \ldots, \lambda_n\}$

Gödelisierung $\ulcorner \cdot \urcorner : \{$endliche Zeichenketten über $L\} \to \mathbb{N}$ (injektiv), $w \mapsto \ulcorner w \urcorner$.

Auf diese Weise kann man L-Terme, L-Formeln, formale Beweise in L als natürliche Zahlen kodieren.

Gesehen:

* $\{\ulcorner \varphi \urcorner \mid \varphi$ L-Formel$\}$ ist primitiv rekursiv.
* <u>Proposition 3.21</u>
  Die Menge $U = \{\ulcorner \varphi \urcorner \mid \varphi$ ist L-Formel mit $\vdash \varphi\}$ der Gödelnummern der allgemeingültigen L-Formeln ist rekursiv aufzählbar.

Wir fixieren nun eine endliche Sprache L.

<u>Definition:</u> Für T eine L-Theorie setzen wir $Thm(T) := \{\varphi \mid \varphi$ ist L-Aussage mit $T \vdash \varphi\}$.

1. T heißt <u>rekursiv</u>, falls $\{\ulcorner \varphi \urcorner \mid \varphi \in T\}$ rekursiv ist.
2. T heißt <u>effektiv axiomatisierbar</u>, falls es T' rekursiv gibt mit $Thm(T) = Thm(T')$
3. T heißt <u>entscheidbar</u>, falls $\{\ulcorner \varphi \urcorner \mid \varphi \in Thm(T)\}$ rekursiv ist.

Lemma 3.22

Ist T eine rekursive L-Theorie, so ist die Menge

$$\mathrm{BEWEIS}_L(T) := \{ (\ulcorner(\varphi_0,\dots,\varphi_{n-1})\urcorner, \ulcorner\varphi\urcorner) \mid \varphi_0,\dots,\varphi_{n-1} \text{ ist ein formaler Beweis von } \varphi \text{ im Hilbertkalkül} \}$$

rekursiv.

Beweis: Der Beweis ist wie in Lemma 3.20. Wir müssen dekodieren (mittels der zweistelligen Funktion $(x)_i$) und testen, ob alle Komponenten von $x = \ulcorner(\varphi_0,\dots,\varphi_{n-1})\urcorner$ L-Formeln kodieren und für jedes $0 \leq i < n$, ob φ_i ein logisches Axiom oder ein Element von T ist, oder ob es mittels MP oder $\exists$-Einführung aus $\varphi_0,\dots,\varphi_{i-1}$ folgt, und schließlich, ob $\varphi_{n-1} = \varphi$ gilt. ∎

Satz 3.23

Für eine L-Theorie T sind äquivalent:

1. T ist effektiv axiomatisierbar.
2. $\{\ulcorner\varphi\urcorner \mid \varphi \in \mathrm{Thm}(T)\}$ ist rekursiv aufzählbar.

Beweis: 1 $\Rightarrow$ 2: Sei T' rekursiv mit $\mathrm{Thm}(T) = \mathrm{Thm}(T')$.

Dann gilt $\{\ulcorner\varphi\urcorner \mid \varphi \in \mathrm{Thm}(T) = \mathrm{Thm}(T')\}$

$$= \{ y \in \mathbb{N} \mid \exists x \in \mathbb{N} : (x,y) \in \mathrm{BEWEIS}_L(T') \}$$

$$= I^2_2(\mathrm{BEWEIS}_L(T')),$$ also Projektion einer rekursiven Menge (Lemma 3.22), somit rekursiv aufzählbar.

(2) $\Rightarrow$ (1): Sei $X = \{\ulcorner\varphi\urcorner \mid \varphi \in Thm(T)\}$ rekursiv aufzählbar. (3)
Dann existiert eine rekursive Funktion

$$f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$$

mit $X = Bild(f) = \{\ulcorner\varphi_n\urcorner \mid n \in \mathbb{N}\}$, d.h. $f(n) = \ulcorner\varphi_n\urcorner$.
Die Funktion $g : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, $g(n) := \ulcorner\bigwedge_{i=0}^{n} \varphi_i\urcorner$ ist dann rekursiv und man hat $g(n) \geq n$ für alle $n \in \mathbb{N}$,
da nach Lemma 3.4 für die Längenfunktion gilt,
dass $lg(x) \leq x$ für alle x.
Es folgt, dass $Bild(g) \subseteq \mathbb{N}$ rekursiv ist ($y \in Bild(g)$
$\Leftrightarrow (\exists x \leq y)\, \underbrace{g(x) = y}_{\text{rekursive Relation}}$).
Also ist $T' = \{\bigwedge_{i=0}^{n} \varphi_i \mid n \in \mathbb{N}\}$ rekursiv, und offenbar gilt $Thm(T) = Thm(T')$. ∎

Definition
Eine widerspruchsfreie Theorie T heißt vollständig, falls für jede L-Aussage φ gilt: $T \vdash \varphi$ oder $T \vdash \neg\varphi$.
Bemerkung: Da T widerspruchsfrei ist, gilt dann $T \vdash \varphi$ gdw $T \nvdash \neg\varphi$.

Korollar 3.24:
Ist T effektiv axiomatisierbar und vollständig, so ist T entscheidbar.
Beweis: Sei $NEG : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, (primitiv) rekursiv mit $NEG(\ulcorner\varphi\urcorner) = \ulcorner\neg\varphi\urcorner$ für alle L-Formeln φ.
Nach Satz 3.23 ist $X := \{\ulcorner\varphi\urcorner \mid \varphi \in Thm(T)\}$ rekursiv aufzählbar.

Man hat dann

$$\mathbb{N} \setminus X = \underbrace{\{n \mid n \text{ nicht Gödelnummer einer } L\text{-Formel}\}}_{\text{rekursiv nach Lemma 3.16}} \cup \underbrace{NEG^{-1}(X)}_{\text{rekursiv aufzählbar nach Lemma 3.10.5}}$$

Somit ist $\mathbb{N} \setminus X$ rekursiv aufzählbar nach Lemma 3.10.

Somit ist $\mathbb{N} \setminus X$ rekursiv nach dem Satz vom Komplement (Lemma 3.14).

$\Longrightarrow$ X ist rekursiv nach dem Satz vom Komplement. ∎

(4)

---

§4. Arithmetik

§4.1 Arithmetische Relationen

Def.: • Eine Relation $R \subseteq \mathbb{N}^n$ heißt <u>arithmetisch</u>, falls sie in der Struktur $\mathfrak{N} := (\mathbb{N}, 0, S, +, \cdot, <)$ definierbar ist.

• Eine Funktion $f : \mathbb{N}^n \to \mathbb{N}$ heißt <u>arithmetisch</u>, falls ihr Graph $\Gamma_f = \{(a_1, \dots, a_n, f(\bar{a})) \mid \bar{a} \in \mathbb{N}^n\} \subseteq \mathbb{N}^{n+1}$ arithmetisch ist.

Ist R arithmetisch, findet man also eine $L_{\mathbb{N}}$-Formel $\varphi(x_1, \dots, x_n)$ mit $R(a_1, \dots, a_n)$ gdw $\mathfrak{N} \models \varphi[a_1, \dots, a_n]$.

Lemma ~~[illegible]~~ 4.1

Alle rekursiv aufzählbaren Relationen sind arithmetisch.

Beweis: Sei zunächst $R(x_1, \dots, x_n)$ eine rekursive Relation.

Behauptung: (i) Die Grundfunktionen $S(x)$, I_i^n, C_0^0, $+$, $\cdot$, $\chi_<(x,y)$ sind alle arithmetisch. [klar]

(ii) Die Menge der arithmetischen Funktionen ist unter R1 (Einsetzung) abgeschlossen.

[Ist Γ_h durch $\varphi_h(y_1, \dots, y_n, x_0)$ definiert und $g_1, \dots, g_n : \mathbb{N}^m \to \mathbb{N}$ die Graphen von durch $\varphi_{g_i}(x_1, \dots, x_m, y)$, so ist $f = h(g_1, \dots, g_n) : \mathbb{N}^m \to \mathbb{N}$ definiert durch $\exists y_1.., y_n\left(\bigwedge_{i=1}^{n} \varphi_{g_i}(x_1.., x_m, y_i) \wedge \varphi_h(y_1.., y_n, x_0)\right)$.]

(iii) Die Menge der arithmetischen Funktionen ist unter R3 (μ-Rekursion) abgeschlossen.

[Ist der Graph von $g: \mathbb{N}^{m+1} \to \mathbb{N}$ durch $\varphi_g(x_1.. x_{m+1}, x_0)$ gegeben und $f = \mu x_{m+1}(g(x_1.. x_{m+1}) = 0)$ durch R3 aus g gebildet, so ist Γ_f definiert durch die $L_{\mathbb{N}}$-Formel

$$\varphi_f(x_1.., x_m, x_0) := \varphi_g(x_1.., x_m, x_0, \underline{0}) \wedge (\forall y < x_0) \neg \varphi_g(x_1.., x_m, y, \underline{0})$$]

Nach Satz 3.7 sind somit alle rekursiven Funktionen arithmetisch, insbesondere ist die charakteristische Funktion $\chi_R: \mathbb{N}^n \to \mathbb{N}$ von $R(x_1.. x_n)$ arithmetisch. Sei $\varphi_{\chi_R}(x_1.. x_n, x_0)$ eine $L_{\mathbb{N}}$-Formel, die Γ_{χ_R} definiert. Dann definiert $\varphi_R(x_1.. x_n) := \varphi_{\chi_R}(x_1.. x_n, S(\underline{0}))$ die Relation R.

Sei nun $R(x_1.. x_n)$ rekursiv aufzählbare Relation. Wähle $\bar{R}(x_1.. x_n, y)$ rekursiv mit $R(\bar{x})$ gdw $\exists y\, \bar{R}(\bar{x}, y)$. Definiert die $L_{\mathbb{N}}$-Formel $\varphi_{\bar{R}}(x_1.. x_n, y)$ die Relation $\bar{R}$, so definiert $\exists y\, \varphi_{\bar{R}}(x_1.. x_n, y)$ die Relation R. ∎

Notation:

Wir definieren für $n \in \mathbb{N}$ rekursiv $L_{\mathbb{N}}$-Terme Δ_n, via

$\Delta_0 := \underline{0}$, $\Delta_{n+1} := S(\Delta_n)$.

Korollar 4.2

Die Theorie der natürlichen Zahlen $Th(\mathfrak{N})$ ist unentscheidbar.

Beweis: Wäre $Th(\mathfrak{N})$ entscheidbar, so wären alle arithmetischen Mengen $\{n \in \mathbb{N} \mid \mathfrak{N} \models \varphi[n]\}$ (für $\varphi(x)$ eine $L_{\mathbb{N}}$-Formel) rekursiv, denn man hat dann

$\mathfrak{N} \models \varphi[n]$ gdw $\mathfrak{N} \models \varphi(\Delta_n)$ gdw $\varphi(\Delta_n) \in Th(\mathfrak{N})$,

und es existiert eine rekursive Funktion $f: \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, sodass $f(n) = \ulcorner \varphi(\Delta_n) \urcorner$ für alle $n \in \mathbb{N}$.

Nach Korollar 3.13 existiert aber eine rekursiv aufzählbare nicht rekursive Menge. Das steht in Widerspruch zu Lemma 4.1 $\square$

Satz 4.3

$Th(\mathfrak{N})$ ist nicht arithmetisch.

Beweis: Wir wiederholen das Diagonalargument aus dem Beweis von Korollar 3.13.

Sei $U(e, n)$ die Relation, die gilt genau dann wenn $e = \ulcorner \varphi \urcorner$ für eine $L_{\mathbb{N}}$-Formel $\varphi = \varphi(v_0)$ und $\varphi(\Delta_n) \in Th(\mathfrak{N})$.

Jede arithmetische Relation (in einer Variablen) ist von der Form $\{n \mid U(e_0, n)\}$ für ein geeignetes e_0.

Wir nehmen an, dass $Th(\mathfrak{N})$ arithmetisch ist. Dann ist $U(e, n)$ arithmetisch (verwende f aus dem vorigen Beweis und Lemma 4.1), somit auch die Relation $\neg U(x, x)$, etwa für e_0 gälte dann $U(e_0, n) \Leftrightarrow \neg U(n, n)$. Für $n = e_0$ ist dies der gesuchte Widerspruch. $\square$

<u>Satz 4.4</u> (1. Gödelscher Unvollständigkeitssatz)

Sei $T \subseteq Th(\mathfrak{N})$ mit $\{\ulcorner\varphi\urcorner \mid \varphi \in T\}$ arithmetisch.

Dann ist T unvollständig.

Der Beweis von Lemma 3.22 zeigt, dass wenn T arithmetisch ist, so auch $BEWEIS_L(T)$. Dann ist ~~ist aber Thm(T) ebenfalls arithmetisch~~ $\{\ulcorner\varphi\urcorner \mid \varphi \in Thm(T)\}$ als Projektion von $BEWEIS_L(T)$ ebenfalls arithmetisch, somit kann $Thm(T)$ nicht gleich $Th(\mathfrak{N})$ sein nach Satz 4.3. Also existiert eine $L_{\mathbb{N}}$-Aussage φ mit $\varphi \in Th(\mathfrak{N}) \setminus Thm(T)$, und man hat $\varphi, \neg\varphi \notin Thm(T)$, somit ist T unvollständig. $\blacksquare$