Lemma 3.14: R rekursiv $\Leftrightarrow$ R und $\neg R$ r.a.

Bew: "$\Rightarrow$" klar.

"$\Leftarrow$" Sei $R(x) \Leftrightarrow \exists y\, \tilde{R}(x,y)$ und $\neg R(x) \Leftrightarrow \exists y\, T(x,y)$

Dann gilt $f(x) = \mu y\, (\tilde{R}(x,y) \vee T(x,y))$ ist rek. und $R(x) \Leftrightarrow \tilde{R}(x, f(x))$ $\boxtimes$

§ 3.15 Gödelnummern von Formeln

Ziel: $\{\varphi : \varphi$ L-Fml, $\vdash \varphi\}$ ist r.a.

Sei $L = \{\lambda_1, \dots, \lambda_\ell\}$ eine endl. Sprache. Wir ordnen den Zeichen, die in L-Fmln vorkommen, Gödelnummern zu:

$\ulcorner \doteq \urcorner = \langle 0, 0 \rangle$ $\qquad$ $\ulcorner v_0 \urcorner = \langle 1, 0 \rangle$

$\ulcorner \wedge \urcorner = \langle 0, 1 \rangle$ $\qquad$ $\ulcorner v_1 \urcorner = \langle 2, 0 \rangle$

$\ulcorner \neg \urcorner = \langle 0, 2 \rangle$

$\ulcorner (\urcorner = \langle 0, 3 \rangle$ $\qquad$ $\ulcorner v_i \urcorner = \langle i, 0 \rangle$ für $i \in \mathbb{N}$

$\ulcorner) \urcorner = \langle 0, 4 \rangle$

$\ulcorner \exists \urcorner = \langle 0, 5 \rangle$

$\ulcorner \lambda_1 \urcorner = \langle 0, 6 \rangle$

$\vdots$

$\ulcorner \lambda_\ell \urcorner = \langle 0, 5 + \ell \rangle$

Sei nun $\phi = \mathcal{J}_1 \dots \mathcal{J}_n$ eine Zeichenreihe aus den obigen Symbolen. Setze

$$\ulcorner \phi \urcorner = \langle \ulcorner \mathcal{J}_1 \urcorner, \dots, \ulcorner \mathcal{J}_n \urcorner \rangle$$

Lemma 3.15: Die folgenden Mengen sind prim rek:

1. $\{\ulcorner t \urcorner : t$ L-Term$\} = TERM_L$
2. $\{\ulcorner \phi \urcorner : \phi$ L-Fml$\} = FML_L$

Erinnerung (Lemma 1.1): Für L-Terme t tritt genau einer der folgenden drei Fälle ein:

(a) t ist eine Variable

(b) t ist eine Konstante

(c) $t = f t_1 \dots t_n$ mit $f \in L$ n-stelliges Fkt zeichen und $t_1, \dots, t_n$ L-Terme

Hierbei sind $f, t_1, \dots, t_n$ eindeutig bestimmt.

Bew von 3.15:

$KON_L = \{ \ulcorner \lambda \urcorner : \lambda \in L$ Konstantensymbol$\}$ ist prim. rek (da endl.)

$VAR_L = \{ x \in \mathbb{N} : \exists_{i<x}\, x = \langle i, 0 \rangle \}$ ist prim. rek.
(da $\langle \cdot, \cdot \rangle$ prim. rek. & $(x)_1$ prim. rek. und $(x)_i < x$ für $x \neq 0$ gilt

in zwei Var. $\tau_{\leq i}(\ulcorner t \urcorner) \Leftrightarrow \ulcorner t \urcorner \in \tau_{\leq i}$

Zeige: $\tau_{\leq n} = \{ \ulcorner t \urcorner : t$ L-Term, $lg(\ulcorner t \urcorner) \leq n \}$ ist prim. rek.

$\tau_{\leq 1} = KON_L \cup VAR_L$

Sei nun $FUN_n = \{ \ulcorner f \urcorner : f \in L$ ist n-stelliges Fktsymbol$\}$
in zwei Var. $n, \ulcorner f \urcorner$ prim. rek.

Nun gilt

$$\tau_{\leq n+1} = \tau_{\leq n} \cup \{ \ulcorner f t_1 \dots t_i \urcorner : lg(\ulcorner f t_1 \dots t_i \urcorner) = n+1$$
$$i \leq n \wedge f \in FUN_i, t_1, \dots, t_i \in \tau_{\leq n} \}$$

Und $n \in \{ \ulcorner t \urcorner : t$ L-Term$\}$
$\Leftrightarrow \exists\, m \leq n : n \in \tau_{\leq m}$

(2) Analog ☑

Lemma 3.16: Die folgenden Mengen sind prim. rekursiv:

1. $\{(\ulcorner t \urcorner, n) : t$ ist L-Term, v_n kommt in t vor$\}$ und
4. $\{(\ulcorner t \urcorner, n) : t$ ist L-Term, v_n kommt in t nicht vor$\}$
2. $\{(\ulcorner \varphi \urcorner, n) : \varphi$ ist L-Fml, v_n kommt in φ vor$\}$
   und genauso für "v_n kommt nicht vor"
   "v_n kommt mind. einmal frei vor"
   "kommt nicht frei vor" ÜA
   "kommt mind. einmal gebunden vor"
   "kommt nicht vor"
3. $\{\ulcorner \varphi \urcorner : \varphi$ ist L-Aussage$\}$

Bew: Skizze zu (1.) Rest: Übung

$Var_{\#M} = \{ x \in \mathbb{N} : \exists i < x \quad x = \langle i, 0 \rangle \wedge \neg x = \langle n, 0 \rangle \}$
ist prim. rek. ☑

Erinnerung: x Variable, t, s L-Terme, ϕ L-Fml

$t \frac{s}{x}$ ersetze alle Vorkommen von x durch s

$\phi \frac{s}{x}$ -"- freien -"-

Lemma 3.17 Es gibt prim. rek. Fkt. $Subst_T$ und $Subst_F : \mathbb{N}^3 \to \mathbb{N}$ s.d. f.a. $n \in \mathbb{N}$ gilt:

Wenn t, s L-Terme, ϕ L-Fml, dann

$$Subst_T(n, \ulcorner s \urcorner, \ulcorner t \urcorner) = \ulcorner t \frac{s}{v_n} \urcorner$$

und $$Subst_F(n, \ulcorner s \urcorner, \ulcorner \phi \urcorner) = \ulcorner \phi \frac{s}{v_n} \urcorner$$

Beweis: Betrachte Hilfsfkt $S_T, S_F : \mathbb{N}^3 \to \mathbb{N}$ wie folgt:

$$S_T(\ulcorner t \urcorner, \langle i_0, \dots, i_n \rangle, \langle \ulcorner s_0 \urcorner, \dots, \ulcorner s_n \urcorner \rangle) = \begin{cases} 0 & \text{sonst} \\ \ulcorner t \frac{s_0}{v_{i_0}} \dots \frac{s_n}{v_{i_n}} \urcorner & \text{falls } t, s_0, \dots, s_n \in TERM_L \text{ und } i_j \neq i_k \text{ für } 0 \leq j, k \leq n \text{ mit } j \neq k \end{cases}$$

und $$S_F(\ulcorner \phi \urcorner, \langle i_0, \dots, i_n \rangle, \langle \ulcorner s_0 \urcorner, \dots, \ulcorner s_n \urcorner \rangle) = \begin{cases} \ulcorner \phi \frac{s_0}{v_{i_0}} \dots \frac{s_n}{v_{i_n}} \urcorner & \text{falls} \dots \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

$\Rightarrow$ S_T, S_F sind prim. rek.

$\Rightarrow$ $Subst_T$, $Subst_F$ prim. rek. ☑

Nun: kodiere Aussagenlogische Fml. (bestimme Zeichenketten aus $p_0, p_1, \ldots$ und $\neg, \wedge$)

Erinnerung: Jede aussagenlog. Fml. g hat eine der folgenden Formen

(A1) $g = p_i$ für p_i aussagenlog. Variable

(A2) $g = \neg f$ für f aussagenlog. Fml.

(A3) $g = f_1 \wedge f_2$ –"– f_1, f_2 –"–

Schreibe FML_p für die Menge der aussagenlog. Fml.

$\leadsto$ erhalte Kodierung $g \mapsto \ulcorner g \urcorner$

(etwa mittels $p_i = \langle i+9, 1 \rangle$ und dann wie zuvor)

Lemma 3.18. Die Menge $TAUT_L$ der Kodierungen von Tautologien (in der Sprache L) ist prim. rek.

Erinnerung: • g allg. gültig wenn f.a. aussagenlog. Belegungen μ $\mu(g) = W$ gilt

• eine Tautologie entsteht allg. aussagen-logischen Fml durch Ersetzen der Var. durch L-Fmln.

Beweisskizze: Zeige, dass die folgenden Aussagen gelten:

• $FML_A = \{ \ulcorner g \urcorner \in \mathbb{N} : g \in FML_p \}$ ist prim. rek

• Die Fkt

$$AUSW(\mu, \ulcorner g \urcorner) = \begin{cases} 0 & g \in FML_A, \text{ nur } p_0, \ldots, p_{n-1} \text{ kommen in } g \text{ vor}, \ \mu = \langle d_0, \ldots, d_{n-1} \rangle \text{ mit } d_i \in \{0,1\} \ (0 \mapsto W,\ 1 \mapsto F) \text{ und } \mu(g) = W \\ 1 & \text{–"– mit } \mu(g) = F \\ 1 & \text{sonst} \end{cases}$$

ist prim. rek.

• Die Menge $TAUT_A = \{ \ulcorner g \urcorner : g \text{ ist Tautologie} \}$ ist prim. rek.

- Es gibt eine prim. rek. Fkt $EINS_L: \mathbb{N}^2 \to \mathbb{N}$ mit $EINS(\langle \ulcorner\varphi_0\urcorner, \ldots, \ulcorner\varphi_{n-1}\urcorner \rangle, \ulcorner g \urcorner) = \ulcorner g^{\varphi_0/p_0 \ldots \varphi_{n-1}/p_{n-1}} \urcorner$
  falls $g \in FML_A$, $\varphi_0, \ldots, \varphi_{n-1} \in FML_L$
  und in g nur die ~~xxxxx~~ Var. $p_0, \ldots, p_{n-1}$ vorkommen.

$\Rightarrow TAUT_L = \{ \ulcorner\varphi\urcorner : \ulcorner\varphi\urcorner \in FML_L \wedge \exists \ulcorner g \urcorner \in FML_P \; lg(\ulcorner g \urcorner) < lg(\ulcorner\varphi\urcorner)$
$\exists \varphi_0, \ldots, \varphi_{n-1} \in FML_L \; \bigwedge_{i=0}^{n-1} lg(\ulcorner\varphi_i\urcorner) < lg(\ulcorner\varphi\urcorner)$
$\wedge \ulcorner\varphi\urcorner = EINS(\langle \ulcorner\varphi_0\urcorner, \ldots, \ulcorner\varphi_{n-1}\urcorner \rangle, \ulcorner g \urcorner) \}$ ☒

Ähnlich: Die Menge $AxGleichheit = \{ \ulcorner\varphi\urcorner : \varphi$ ist ein Axiom der Gleichheit $\}$
(vgl. Lemma 1.9) und
$\exists\text{-}QAx = \{ \ulcorner\varphi\urcorner : \varphi$ ist ein $\exists$-Quantorenaxiom $\}$
(vgl. Lemma 1.10, benutze 3.17 für den Beweis!)
sind primitiv rekursiv.

Zusammenfassend:

Satz 3.19 Die Menge $Ax = \{ \ulcorner\varphi\urcorner : \varphi$ L-Fml, φ ist ein logisches Axiom $\}$
~~xxx~~
ist prim. rekursiv

(d.h. φ erfüllt (1.), (2.) oder (3.) aus der Def vom Hilbertkalkül)

Kodiere nun endl. Folgen von L-Fmln $(\varphi_0, \ldots, \varphi_{n-1})$
durch $\ulcorner(\varphi_0, \ldots, \varphi_{n-1})\urcorner = \langle \ulcorner\varphi_0\urcorner, \ldots, \ulcorner\varphi_{n-1}\urcorner \rangle$

Lemma 3.20. Die Menge $BEWEIS_L = \{ (\ulcorner(\varphi_0, \ldots, \varphi_{n-1})\urcorner, \varphi) \mid \varphi_0, \ldots, \varphi_{n-1}$ ist ein Bew. von $\varphi \}$ (im Hilbertkalkül)
ist prim. rek.

Bew: Müssen dekodieren und testen ob alle Komponenten von $x = \ulcorner(\varphi_0, \dots, \varphi_{n-1})\urcorner$ L-Fmln φ_i kodieren und für jedes $0 \leq i < n$, ob φ_i ein (logisches) Axiom ist, oder ob es mittels MP oder $\exists$-Einführung aus $\varphi_0, \dots, \varphi_{i-1}$ folgt und ob $\varphi_{n-1} = \varphi$ gilt. ☑

Prop 3.21: Die Menge $\mathcal{U} = \{\ulcorner\varphi\urcorner : \vdash \varphi\}$ ist r.a.

Bew: Es gilt $n \in \mathcal{U} \Leftrightarrow \exists x \, (x, n) \in \mathrm{BEWEIS}_L$ ☑