Erinnerung: $R \subseteq \mathbb{N}^n$ rekursiv $\Leftrightarrow$ $\chi_R : \mathbb{N}^n \to \mathbb{N}$ rekursiv.

~~Bem~~: rekursiv = "berechenbar"

Also $R \subseteq \mathbb{N}^n$ rekursiv, genau dann wenn es entscheidbar ist, mittels einer TM ob $(x_1, .., x_n) \in R$ gilt

Bem: $\{A \subseteq \mathbb{N}^n : A$ rekursiv$\}$ ist abzählbar, da $\{f : \mathbb{N}^n \to \mathbb{N} : f$ rekursiv$\}$ abz. ist.

Folgerung 3.6: Fast alle Mengen (d.h. TM von $\mathbb{N}$) sind nicht rekursiv.

Bew: $2^\omega > \omega$.

Beispiel: sei A die Menge mit $x \in A \Leftrightarrow$ Riemannsche Vermutung gilt.

Dann ist A rekursiv.

(Wenn RV gilt, ist $A = \mathbb{N}$,
wenn RV nicht gilt, ist $A = \emptyset$. In beiden Fällen ist A rekursiv)

(Menge: $n = 1$)

§3.3 Ein anderer Aufbau der rek. Fkt. (Leben ohne prim. Rek.)

Satz 3.7: Alle rekursiven Fkt. lassen sich aus den Grundfunktionen $S(x)$, I_i^n, C_0^0, $+$, $\cdot$, $\chi_<(x,y)$ durch Anwenden der Regeln R1 (Einsetzung) und R3 (μ-Rekursion) gewinnen.

$\leadsto$ nenne solche Fkt $*$-rekursiv

Lemma 3.8: (1) $x \dot{-} y$ ist $*$-rekursiv

(2.) Die Klasse der $*$-rek. Funktionen ist abg. unter Booleschen Komb. $(\vee, \wedge, \neg)$ und beschränkter Quantifizierung (siehe 3.3 (3) & (8.))

(3.) $x \dot= y$ ist $*$-rekursiv

(4.) $x \equiv y \pmod z$ ist $*$-rekursiv

(5.) Die Klasse der $*$-rek. Fkt ist abg. unter Def. durch Fallunterscheidung (siehe 3.3 (5.))

<u>Bew</u>: (1.) $x \dot- y = \max(0, x-y) = \mu z\ x < (y+z)+1$

(2.) Abg. unter $\wedge, \vee, \neg$: wie in 3.3 (3)

Sei $P(x,y)$ $*$-rekursiv. Definiere

$$g(x,z) = \mu y\ (P(x,y) \vee y \dot= z)$$

Dann ist

$$\exists y < z\ P(x,y) \Leftrightarrow g(x,z) < z.$$

(3.) $x \dot= y \Leftrightarrow (\neg x < y \wedge \neg y < x)$

(4.) $x \equiv y \pmod z \Leftrightarrow \exists w < (x+y+1)\ (x \dot= y + wz \vee y = x + wz)$

(5.) Wie Bew. von 3.3 (5.) ☑

Lemma 3.9 (Gödels β-Funktion): Es gibt eine $*$-rekursive Funktion $\beta(a,b,i)$ mit folgender Eigenschaft:
Für jede endl. Folge $c_0, \ldots, c_{n-1}$ gibt es a und b, s.d.

$$\beta(a,b,i) = c_i$$

für $i = 0, \ldots, n-1$ gilt.

<u>Bew</u>: $\beta(a,b,i) = \mu z\ z \equiv a \pmod{b(i+1)+1}$ ist $*$-rek.

Seien $c_0, \ldots, c_{n-1}$ gegeben. Wähle $b \in \mathbb{N}$ mit

$n! \mid b$ und $b > c_i$ f.a. $i = 0, \ldots, n-1$.

<u>Beh</u>: $b \cdot 1 + 1, \ldots, b \cdot n + 1$ sind p.w. teilerfremd

Sei p prim mit $p \mid (bi+1) \Rightarrow p \nmid b$. Ang. $p \mid (bj+1)$ für $j \neq i$, $j > i$

$0 < i, j \leq n \Rightarrow p \mid b(j-i) \Rightarrow p \mid (j-i)$

↯ zu $(j-i) \mid b$. ☑ Beh.

Sei a eine gemeinsame Lösung der Kongruenzen

$$a \equiv c_0 \quad (\mathrm{mod}\ b \cdot 1 + 1)$$
$$\vdots \qquad \text{(existiert nach CRS)}$$
$$a \equiv c_{n-1} \quad (\mathrm{mod}\ b \cdot n + 1)$$

Wg. $c_i < b(i+1)+1$ ist c_i die kleinste nat. Zahl, die zu a kongruent modulo $b(i+1)+1$ ist. $\boxtimes$

Beweis von Satz 3.7:

Z: $*$-rekursive Fkt. sind unter prim. Rek. abg., d.h. für g, h $*$-rek und f gegeben durch

$$f(x, 0) = g(x)$$
$$f(x, y+1) = h(x, y, f(x, y))$$

ist f auch $*$-rek.

Betrachte die $*$-rek. Relation

$$R(x, y, a, b) \Leftrightarrow (\beta(a, b, 0) = g(x) \wedge \forall i < y\ \beta(a, b, i+1) = h(x, i, \beta(a, b, i)))$$

Es gilt $\forall x, y\ \exists a, b\ R(x, y, a, b)$ nach 3.9.

Also ist

$$s(x, y) = \mu s\ \exists a, b \leq s\ R(x, y, a, b)$$

$*$-rekursiv. Dann ist

$$f(x, y) = \mu z\ \exists a, b \leq s(x, y)\ (R(x, y, a, b) \wedge z = \beta(a, b, y))$$

ebenfalls $*$-rekursiv. $\boxtimes$

§ 3.4 Rekursiv aufzählbare Mengen

Def: Eine Relation R heißt rekursiv aufzählbar (r.a.), wenn für eine rekursive Relation $\tilde{R}$ gilt

$$R(x_0,..,x_n) \Leftrightarrow \exists y\ \tilde{R}(x_0,..,x_n,y)$$

Insbesondere sind rekursive Relationen rek. aufzählbar.

Lemma 3.10 Wenn P und R r.a. sind, dann auch

1. $P \vee R$
2. $P \wedge R$
3. $\exists z\ R(x_0,..,x_{n-1},z)$
4. $T(x_0,..,x_n,w) \Leftrightarrow \forall z<w\ R(x_0,..,x_n,z)$
5. $R(f_0(x_0,..,x_k),..,f_n(x_0,..,x_k))$ $\quad (f_i : \mathbb{N}^{k+1} \to \mathbb{N}$ rek.$)$

Bew: Sei $P(x_0,..,x_n) \Leftrightarrow \exists y\ \tilde{P}(x_0,..,x_n,y)$ und
$R(x_0,..,x_n) \Leftrightarrow \exists y\ \tilde{R}(x_0,..,x_n,y)$ für $\tilde{P}, \tilde{R}$ rekursiv.

Schreibe $\bar{x}$ für $x_0,..,x_n$

1. Nun gilt $P(\bar{x}) \vee R(\bar{x}) \Leftrightarrow \exists y(\tilde{P}(\bar{x},y) \vee \tilde{R}(\bar{x},y))$
2. $P(\bar{x}) \wedge R(\bar{x}) \Leftrightarrow \exists y\ (\tilde{P}(\bar{x},\beta_1^2(y)) \wedge \tilde{R}(\bar{x},\beta_2^2(y)))$
   $y = \alpha_2(y_1,y_2)$
3. $\exists z\ R(\bar{x},z) \Leftrightarrow \exists y\ \tilde{R}(x_0,..,x_{n-1},\beta_1^2(y),\beta_2^2(y))$
4. $T(x_0,..,x_n,w) \Leftrightarrow \exists s\ \forall z<w\ \tilde{R}(\bar{x},(s)_z)$
   zu komp.fkt. aus Lemma 3.4
   $s = \langle s_0,..,s_m \rangle \quad (s)_z = \begin{cases} s_z & z \le m \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$
5. $R(f_0(\bar{x}),..,f_n(\bar{x})) \Leftrightarrow \exists y\ \tilde{R}(f_0(\bar{x}),..,f_n(\bar{x}),y)$ $\boxtimes$

Lemma 3.11 Sei $R \subseteq \mathbb{N}$. Dann ist R r.a. gdw. $R = \emptyset$ oder es eine rek. Fkt f gibt mit $f[\mathbb{N}] = R$.

__Bew__: $f: \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ rek. $\Rightarrow R = f[\mathbb{N}]$ rek., da
$R(x) \Leftrightarrow \exists y\ f(y) = x$ gilt.

Sei umgekehrt $R(x) \Leftrightarrow \exists y\, \check{R}(x,y)$ r.a. und $r \in R$.
Dann ist R das Bild von

$$f(x) = \begin{cases} (x)_0 & \text{wenn } \check{R}((x)_0,(x)_1) \text{ gilt} \\ r & \text{sonst} \end{cases}$$

Die leere Menge ist natürlich rek. aufz. ☑

Satz 3.12 Es gibt eine universelle r.a. Relation $U \subseteq \mathbb{N}^2$, d.h. U ist rek. aufz. und jede r.a. Menge $R \subseteq \mathbb{N}$ hat die Form ~~$\forall$~~ $R(x) \Leftrightarrow U(e,x)$ für ein geeignetes $e \in \mathbb{N}$.

Bew Sei $S(x,y)$ rekursiv und M eine TM, die versucht $\mu y\, \chi_S(x,y) = 0$ zu berechnen.
M stoppt genau dann bei Input x, wenn $\exists y\, S(x,y)$ gilt.
Es gilt also $\exists y\, S(x,y) \Leftrightarrow \exists g\, T_1(\ulcorner M \urcorner, x, g)$
Die rek. aufz. Relation

$$U(e,x) \Leftrightarrow \exists g\, T_1(e,x,g)$$

ist also universell. ☑

Korollar 3.13 Es gibt eine Menge, die nicht rekursiv aber r.a. ist.

Bew zeige zunächst $\neg U(x,x)$ ist nicht r.a.
Ang. $\neg U(x,x)$ rek. aufz., d.h. ex. $e \in \mathbb{N}$ mit

$$\neg U(x,x) \Leftrightarrow U(e,x)$$

↯ für $x = e$!

$\Rightarrow$ $U(x,x)$ ist nicht rekursiv (3.3), aber rek. aufzählbar ☑