\# Zustände − 1

Letztes Mal: kodiere TM M als $\alpha_2(m, \ulcorner\delta\urcorner)$

Nun kodiere Konfigurationen $C = (q, p, t)$
mit $q \in \{0, \dots, m-1\}$, $p \in \mathbb{Z}$, $t : \mathbb{Z} \to \{0, 1, 2\}$
mit $|\{x \in \mathbb{Z} : t(x) \neq 0\}| < \infty$

Wähle Bijektion $z : \mathbb{Z} \to \mathbb{N}$

$$z(x) = \begin{cases} 2x-1 & x > 0 \\ -2x & x \leq 0 \end{cases}$$

Kodiere $p \in \mathbb{Z}$ mittels $z(p) =: \ulcorner p \urcorner \in \mathbb{N}$

$t : \mathbb{Z} \to \{0, 1, 2\}$ ist eind. bestimmt durch die (endl.) Menge
$\{(z(x), t(x)) : t(x) \neq 0\}$

Fasse diese Menge als endl. Folge $(n_i, t(n_i))_{0 \leq i \leq \ell}$ auf
(in beliebiger Ordnung, bspw. durch ersten Eintrag aufsteigend geordnet)

Setze $\ulcorner t \urcorner = \langle \alpha_2(n_0, t(n_0)), \dots, \alpha_2(n_\ell, t(n_\ell)) \rangle$
$= 2^{\alpha_2(n_0, t(n_0))} \cdot \_\_ \cdot \pi(\ell-1)^{\alpha_2(n_\ell, t(n_\ell))+1} - 1$

Bestimme (prim. rek.) Symbol auf Band t an Stelle $\overset{z^{-1}(\ell)}{i} \in \mathbb{N}$

$$\tilde{t}(i, \ulcorner t \urcorner) = \begin{cases} 1 & \text{falls } \alpha_2(i,1) = \mu x < \ulcorner t \urcorner \; \pi(\lg(\ulcorner t \urcorner)-1)^{x+1} \mid \ulcorner t \urcorner + 1 \wedge \pi(\lg \ulcorner t \urcorner - 1)^{x+2} \nmid \ulcorner t \urcorner + 1 \\ 1 & \text{falls gilt: } \exists j < \lg(\ulcorner t \urcorner) - 1 \;\; \alpha_2(i,1) = \mu x < \ulcorner t \urcorner \; \pi(j)^x \mid \ulcorner t \urcorner + 1 \wedge \pi(j)^{x+1} \nmid \ulcorner t \urcorner + 1) \\ 2 & \text{analog zu ersten beiden Fällen mit } \alpha_2(i,2) \text{ anstatt } \alpha_2(i,1) \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

Def: Sei M TM, $C = (q, p, t)$ Konf. von T. Wir sagen, dass C' die Nachfolgerkonf. von C ist (schreibe $C' = M(C)$), wenn gilt:

$$\delta(q, p(t)) = (q', \gamma, \varepsilon) \quad \text{für } \varepsilon \in \{L, R\} \text{ mit}$$

$$t'(x) = t(x) \text{ f.a. } x \neq p \text{ und } t'(p) = \gamma \text{ und}$$

$$p' = \begin{cases} p-1 & \text{falls } \varepsilon = L \\ p+1 & \text{falls } \varepsilon = R \end{cases}$$

Kodiere Konf. C als $\ulcorner C \urcorner = \alpha_3(q, \ulcorner p \urcorner, \ulcorner t \urcorner)$.

Lemma 3.5 Es gibt eine prim. rek. Fkt. $N(x,y)$, s.d. für alle TM M und alle passenden Konf. C gilt:

$$N(\ulcorner M \urcorner, \ulcorner C \urcorner) = \ulcorner M(C) \urcorner$$

Bew: Mittels prim. Rek. erhalten wir

$\ulcorner M \urcorner \rightsquigarrow m, \ulcorner \delta \urcorner$

$\ulcorner C \urcorner \rightsquigarrow q, \ulcorner p \urcorner, \ulcorner t \urcorner$

Wir suchen prim. rek. Fkt.

$\underbrace{NFZ}_{\text{NF-Zustand}}, \underbrace{NFK}_{\text{Nachf.-Kopfpos}}, \underbrace{NFT}_{\text{NF-Tape}} : \mathbb{N}^4 \to \mathbb{N}$

$$NFZ(\ulcorner \delta \urcorner, q, \ulcorner p \urcorner, \ulcorner t \urcorner) = \beta_1^3(\tilde{\delta}(\alpha_2(q, \tilde{t}(\ulcorner p \urcorner, \ulcorner t \urcorner)), \ulcorner \delta \urcorner))$$

$\left.\begin{array}{l} \tilde{t}(\ulcorner p \urcorner, \ulcorner t \urcorner) = \text{Bandinhalt unter Lesekopf} \\ \underbrace{\tilde{\delta}(\alpha_2}_{\text{letztes Mal}}(q, \tilde{t}(\ulcorner p \urcorner, \ulcorner t \urcorner)), \ulcorner \delta \urcorner) = \alpha_3(q', \gamma, \varepsilon) \end{array}\right\}$ prim. rek.

Band nach Anwenden von γ:

0	1	-1	2	-2	3	...

$$NFK(\ulcorner\delta\urcorner, q, \ulcorner p\urcorner, \ulcorner t\urcorner) = \begin{cases} \ulcorner p\urcorner + 1 & \ulcorner p\urcorner = 0 \wedge \overbrace{\beta_3^3(\tilde{\delta}(\alpha_2(q, \tilde{t}(\ulcorner p\urcorner, \ulcorner t\urcorner)), \ulcorner\delta\urcorner)}^{(*)} = R \\ \ulcorner p\urcorner + 2 & \quad -\text{"}- \quad (*) = L \\ \ulcorner p\urcorner + 2 & \ulcorner p\urcorner = 1 \wedge (*) = R \\ \ulcorner p\urcorner - 1 & \ulcorner p\urcorner = 1 \wedge (*) = L \\ \ulcorner p\urcorner - 2 & 2 \mid \ulcorner p\urcorner \wedge \ulcorner p\urcorner \neq 1 \wedge (*) = L \\ \ulcorner p\urcorner + 2 & \quad -\text{"}- \quad (*) = R \\ \ulcorner p\urcorner + 2 & 2 \nmid \ulcorner p\urcorner \wedge \ulcorner p\urcorner \neq 0 \wedge (*) = L \\ \ulcorner p\urcorner - 2 & \quad -\text{"}- \quad (*) = R \end{cases}$$

Nun: NFT. Muss $\ulcorner t\urcorner$ geeignet abändern!

- Falls $\tilde{t}(i, \ulcorner t\urcorner) = 0$ setze $NFT(\ulcorner\delta\urcorner, q, \ulcorner p\urcorner, \ulcorner t\urcorner) = \left\lfloor \frac{(\ulcorner t\urcorner + 1)}{\pi(lg(\ulcorner t\urcorner) - 1)} \right\rfloor \cdot \pi(lg(\ulcorner t\urcorner))^{\gamma} \dot{-} 1$

- Falls $\tilde{t}(i, \ulcorner t\urcorner) \neq 0$: Brauche Hilfsfkt. die mir die zur Stelle i gehörige PZ ausspuckt!

$\overset{\shortparallel}{\tilde{t}}$

$$f(i, \ulcorner t\urcorner) = \begin{cases} \pi(lg(\ulcorner t\urcorner - 1)) & \text{falls } \pi(lg(\ulcorner t\urcorner) - 1)^{\tilde{t}} \mid \ulcorner t\urcorner + 1 \text{ und } \pi(lg(\ulcorner t\urcorner) - 1)^{\tilde{t}+1} \nmid \ulcorner t\urcorner + 1 \\ \pi(\mu j < lg(\ulcorner t\urcorner - 1) : \pi(j)^{\tilde{t}} \mid \ulcorner t\urcorner + 1 \wedge \pi(j)^{\tilde{t}+1} \nmid \ulcorner t\urcorner + 1) & \text{falls so ein } j \text{ existiert} \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

Setze nun $NFT(\ulcorner\delta\urcorner, q, \ulcorner p\urcorner, \ulcorner t\urcorner) = \left\lfloor \frac{\ulcorner t\urcorner + 1}{f(i, \ulcorner t\urcorner)^{\tilde{t}}} \right\rfloor \cdot f(i, \ulcorner t\urcorner)^{\gamma} \dot{-} 1$

mit $\gamma = \beta_2^3(\tilde{\delta}(\alpha_2(q, \tilde{t}(\ulcorner p\urcorner, \ulcorner t\urcorner)), \ulcorner\delta\urcorner)$

Nun $\ulcorner M(C)\urcorner = \alpha_3(NFZ(\ulcorner\delta\urcorner, q, \ulcorner p\urcorner, \ulcorner t\urcorner), NFK(\ulcorner\delta\urcorner, q, \ulcorner p\urcorner, \ulcorner t\urcorner), NFT(\ulcorner\delta\urcorner, q, \ulcorner p\urcorner, \ulcorner t\urcorner))$ $\boxtimes$

Satz 3.1 Jede TM berechenbare Fkt $f(x_1,..,x_n)$ ist rekursiv.

Bew: Betrachte die folgenden prim. rek. Hilfsfkt:

$INPUT(x_1,..,x_n) = \alpha_3(\ulcorner 0, 0, \ulcorner t \urcorner)$

wobei t der Bandinhalt ist, der $x_1,..,x_n$ kodiert

(d.h. $t(z) = 0$ für $z<0$, $t(z) = 1$ für $0 \leq z < x_1$

$t(x_1) = 0$, $t(z) =$ für $x_1 < z \leq x_2$, etc.)

$STOP(\ulcorner M \urcorner, \ulcorner C \urcorner) \Leftrightarrow \beta_1^3(\ulcorner C \urcorner) = \beta_1^2(\ulcorner M \urcorner) \wedge \beta_2^3(\ulcorner C \urcorner) = 0$

C ist Stopkonf. von M

$OUTPUT(\ulcorner C \urcorner) = lg(\beta_3^3(\ulcorner C \urcorner)) = lg(\ulcorner t \urcorner)$

$\tilde{N}(\ulcorner M \urcorner, \ulcorner C \urcorner, s)$ mittels prim. Rek.:

N s-fach iteriert

$\tilde{N}(\ulcorner M \urcorner, \ulcorner C \urcorner, 0) = \ulcorner C \urcorner$

$\tilde{N}(\ulcorner M \urcorner, \ulcorner C \urcorner, s+1) = N(\ulcorner M \urcorner, \tilde{N}(\ulcorner M \urcorner, \ulcorner C \urcorner, s))$

Kleene-Prädikat:

$T_n(\ulcorner M \urcorner, x_1,..,x_n, g) = 0 \Leftrightarrow STOP(\ulcorner M \urcorner, \ulcorner \tilde{N}(\ulcorner M \urcorner, \ulcorner INPUT(x_1,..,x_n) \urcorner, g) \urcorner)$

Maschine M stoppt bei Eingabe $x_1,..,x_n$ nach g-vielen Schritten

Sei nun $f: \mathbb{N}^n \to \mathbb{N}$ TM-berechenbar und M TM, die f berechnet. Dann gilt

$$f(x_1,..,x_n) = OUTPUT(\tilde{N}(\ulcorner M \urcorner, INPUT(x_1,..,x_n), \mu g(T_n(\ulcorner M \urcorner, x_1,..,x_n, g) = 0)))$$

☒