(R1) Idee: Berechne nacheinander $g_1(x_1,\dots,x_n),\dots,g_k(x_1,\dots,x_n)$
Speichere Ergebnisse als Tupel auf dem Tape
Berechne dann $h(g_1(x_1,\dots,x_n),\dots,g_k(x_1,\dots,x_n))$

Ausführlich:

Bandinhalt $\overset{\overset{0}{\downarrow}}{b}\,|\,x_1\,|\,0\,|\,x_2\,|\,0\,|\dots|\,x_n\,|\,b\,|\,b\dots$

(*) Kopiere $(x_1,\dots,x_n)$ "nach links" mit Blank dazwischen

Neuer Bandinhalt:

$\dots bb\, x_1 0 x_2 0 \dots x_n\, b\, x_1 0 x_2 0 \dots x_n\, bb\dots$

Berechne $g_1(x_1,\dots,x_n)$ mittels Programm T_{g_1}

Neuer Bandinhalt:

$\dots bb\, x_1 0 x_2 0 \dots 0 x_n\, b\, g(x_1,\dots,x_n)\, bb\dots$

Kopiere $g(x_1,\dots,x_n)$ nach links von $(x_1,\dots,x_n)$ mit Blank dazw.

Kopiere $(x_1,\dots,x_n)$ nach rechts mit Blank dazwischen

Lösche das rechte $g_1(x_1,\dots,x_n)$

Neuer Bandinhalt:

$\dots bb\, g_1(x_1,\dots,x_n)\, b\, x_1 0 x_2 0 \dots x_n\, b\, \underset{\underset{0}{\uparrow}}{x_1} 0 x_2 0 \dots x_n\, bb\dots$

etc. mit $g_i(x_1,\dots,x_n)$ für $i=1,\dots,k$.

Erhalte:

$bb\, g_k(x_1,\dots,x_n)\, b\, g_{k-1}(x_1,\dots,x_n)\, b \dots g_1(x_1,\dots,x_n)\, b\, x_1 0 x_2 \dots 0 x_n\, \underset{\underset{0}{\uparrow}}{b}$

Kopiere $g_1(x_1,\dots,x_n)$ bis $g_k(x_1,\dots,x_n)$ nacheinander nach rechts, lösche $x_1 0 x_2 \dots x_n$ vom Band.

Führe T_h aus.

Wie geht (*)?

- Laufe mit Lesekopf nach rechts bis zum ersten b
- gehe mit Lesekopf eins nach links, lese aus.
- Falls Zeichen = 1, schreibe b, gehe nach links bis zum zweiten ~~ersten~~ b, ~~gehe nach links~~ schreibe 1, gehe nach rechts bis zum zweiten b, schreibe 1. Gehe nach links

$b1b \dots 1b$

Falls Zeichen = 0, ~~mach~~ verfahre analog
Falls Zeichen = b, wechsle in a_{k2} Zustand und gehe eins nach rechts

$$\ldots b\, b\, 1\, 0\, 1\, b\, 1\, 0\, 1\, b\, b \ldots$$
$$\uparrow$$
$$0$$

Zweites Hilfsprogramm:
Lösche das "rechte" $g_1(x_1, .., x_k)$ beim Kopieren:

$\ldots b\, g_1(x_1, .., x_k)\, b\, x_1 0 \ldots 0 x_n\, b\, g_1(x_1, .., x_n)\, b$

~~Gehe nach rechts, bis das erste Mal bbbb auf dem Tape steht.~~
~~Gehe nach links, bis~~

(Ändere Kopierprogramm ab, so dass nix rechts geschrieben wird).

Warum kann man davon ausgehen, dass T_{g_1} die "linke Bandseite" nicht überschreibt?
~~jedes~~ Ändere Programm von T_{g_1} so ab, dass immer wenn ~~etwas auf der linken Ban~~ das linkeste Wort (d.h. $g_1(x_1, .., x_k)$) überschrieben wird, dieses vorher nach "noch weiter links" kopiert wird (und später zurück).

(R2): ÜA

(R3): Start: $bb\, \overset{0}{\overset{\downarrow}{x_1}}\, 0 \ldots 0\, x_{k-1}\, bb$
Füge "Zähler" ans Ende $\ldots bb\, x_1 0 \ldots 0\, x_{k-1}\, \overset{0}{\overset{\downarrow}{0}}\, bb \ldots$
Kopiere $(x_1, .., x_{k-1}, 0)$ nach links

Schleife

Berechne $g(x_1,..,x_{n-1},z)$ $\rightsquigarrow$ $bbx_1 0 .. x_{n-1} 0 z b\, g(x_1,..,x_{n-1},z) bb.$

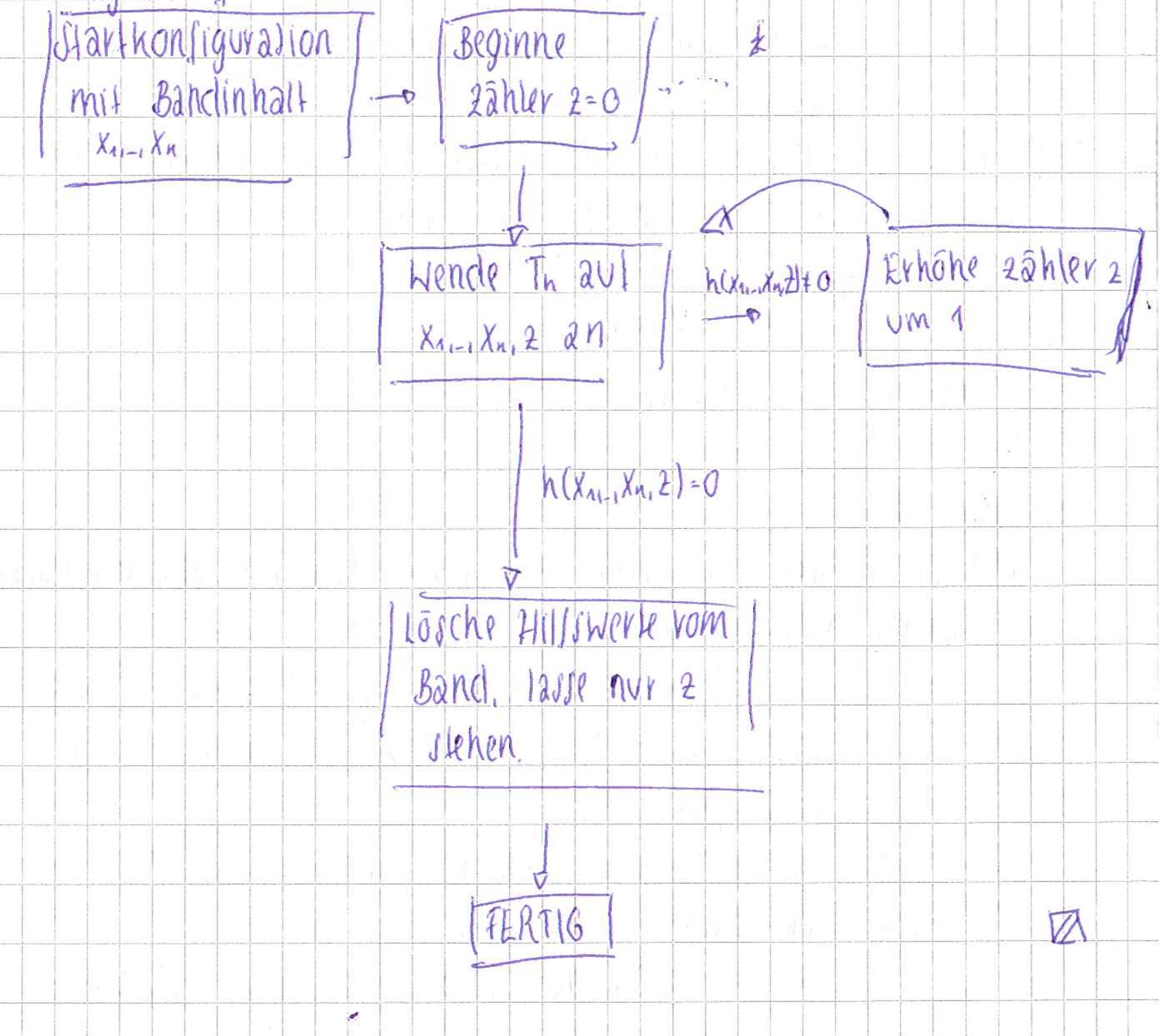
Falls $g(x_1,..,x_{n-1},z) = 0$, kopiere z dorthin ($bx_1 0 x_{n-1} z bb...$ $\rightsquigarrow$ $bx_1 0 x_{n-1} z b z$)

Lösche alles außer dem gerade geschriebenen z und wechsele in akz. Zustand.

Falls $g(x_1,..,x_{n-1},z) \neq 0$, überschreibe $g(x_1,..,x_{n-1},z)$ durch $x_1 0 .. 0 x_{n-1} 0 z{+}1$ und lösche das 'linke' $x_1 0 .. 0 x_{n-1} 0 z$

Wdh. Schleife.

In Diagrammform



☐

§3.2: Primitiv rekursive Funktionen und Gödelisierung

Lemma 3.2. Die Funktion $x+y$, $x\cdot y$, x^y, $x!$ und

$$x \dot- y = \begin{cases} x-y & \text{wenn } y \le x \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

sind primitiv rekursiv.

Bew: $x+y$: per prim. Rekursion:

$x+0=x$ $\quad x+(y+1)=S(x+y)$

$x\cdot y$: etc

$x\cdot 0=0$ $\quad x\cdot(y+1)=x\cdot y+y$

$x\dot- y$:

Definiere zunächst $y \dot- 1$ via $0\dot-1=0$ ~~...~~

und $(y+1)\dot-1=y$

Setze nun $x\dot-0=x$ und $x\dot-(y+1)=(x\dot-y)\dot-1$ ☐

Def: Eine Teilmenge $A\subseteq \mathbb{N}^m$ (Prädikat) heißt (primitiv) rekursiv, wenn die charakteristische Fkt

$$\chi_A(x_1,..,x_m) = \begin{cases} 0 & \text{wenn } (x_1,..,x_m)\in A \\ 1 & \text{sonst} \end{cases}$$

(primitiv) rekursiv ist.

Lemma 3.3

(1.) Die Menge der prim. rekursiven Fkt ist abgeschlossen unter Vertauschen von Variablen

(d.h. $f:\mathbb{N}^m\to\mathbb{N}$ prim. rek., $g:\mathbb{N}^m\to\mathbb{N}$ def. als

$g(x_1,..,x_m) = f(x_1,..,x_{i-1},x_j,x_{i+1},..,x_{j-1},x_i,x_{j+1},..,x_m)$

ist auch prim. rek.)

Bew: $g(x_1,..,x_n)$ ist f verknüpft mit geeigneten Projektionen

(2.) Wenn $A\subseteq\mathbb{N}^n$ prim. rek ist und $f_1,..,f_n:\mathbb{N}^k\to\mathbb{N}$ prim. rek sind, dann auch

$Y=\{(x_1,..,x_k)\in\mathbb{N}^k : (f_1(x_1,..,x_k),..,f_n(x_1,..,x_k))\in A\}$

Bew: $\chi_Y = \chi_A(f_1,..,f_n)$

Bew:
$\chi_{A^c} = 1 - \chi_A$
$\chi_{A \cap B} = \chi_A \cdot \chi_B$

$\chi_<(x,y) = 1\!\!1_{\mathbb{N}\setminus\{0\}}(y \dot{-} x)$

$f = \chi_{A_1} f_1 + \dots + \chi_{A_k} f_k$

$$f(\bar{x}) = \begin{cases} f_1(\bar{x}) & \bar{x} \in A_1 \\ \vdots & \\ f_k(\bar{x}) & \bar{x} \in A_k \end{cases}$$

(3.) Die Menge der primitiv rekursiven Teilmengen von $\mathbb{N}^n$ enthält $\emptyset$ und $\mathbb{N}^n$ und ist abg. unter $\cap, \cup$ und Komplement.

(4.) Die Menge $\{(x,y) : x < y\} \subseteq \mathbb{N}^2$ ist prim. rekursiv

(5.) (Definition per Fallunterscheidung)
Sei $\mathbb{N}^n = A_1 \dot\cup \dots \dot\cup A_k$ eine Zerlegung von $\mathbb{N}^n$ in endl. viele prim. rek. Mengen A_i und $f_1, \dots, f_k : \mathbb{N}^n \to \mathbb{N}$ prim. rek. Die Funktion f

$$f(x_1,\dots,x_n) = \begin{cases} f_1(x_1,\dots,x_n) & \text{falls } (x_1,\dots,x_n) \in A_1 \\ \vdots \\ f_k(x_1,\dots,x_n) & \text{falls } (x_1,\dots,x_n) \in A_k \end{cases}$$

ist prim. rekursiv
Insbes. sind $(x_1,\dots,x_n) \mapsto \max_{1\le i\le n} x_i$
und $(x_1,\dots,x_n) \mapsto \min_{1\le i\le n} x_i$ prim. rek.

(6.) (Beschränkte Summen und Produkte)
~~Beschränkter μ-Operator~~

Per Rekursion und mit 3.2.

Wenn $f : \mathbb{N}^{n+1} \to \mathbb{N}$ prim. rek. ist, dann auch:
$\sum_{t=0}^{y} f(x_1,\dots,x_n,t)$ und $\prod_{t=0}^{y} f(x_1,\dots,x_n,t)$

(7.) (Beschränkter μ-Operator) Sei $X \subseteq \mathbb{N}^{n+1}$ prim. rek.
Dann ist die Fkt $f : \mathbb{N}^{n+1} \to \mathbb{N}$

$$f(x_1,\dots,x_n,z) := \begin{cases} 0 & \text{wenn es kein } t \le z \text{ gibt mit } (x_1,\dots,x_n,t) \in X \\ t_0 & \text{wenn } t_0 \le z \text{ minimal ist mit } (x_1,\dots,x_n,t_0) \in X \end{cases}$$

auch prim. rekursiv. Schreibe $t_0 = \mu t \le z\ (x_1,\dots,x_n,t) \in X$

Bew: $f(x_1,\dots,x_n,0) = 0$

$$f(x_1,\dots,x_n,z+1) = \begin{cases} f(x_1,\dots,x_n,z) & \text{falls } \sum_{t=0}^{z} \chi_X(x_1,\dots,x_n,t) \ge 1 \\ z+1 & \text{falls } \sum_{t=0}^{z} \chi_X(\bar{x},t) = 0 \text{ und } (\bar{x},z+1) \in X \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

$\leadsto f$ prim. rek. wg (5.)

(8.) (Beschränkte Quantoren) $X \subseteq \mathbb{N}^{n+1}$ prim. rek., dann auch $X_\exists = \{(x_1,..,x_n,z) \in \mathbb{N}^{n+1} : \exists t \leq z \ (x_1,..,x_n,t) \in X\}$
und $X_\forall = \{(x_1,..,x_n,z) \in \mathbb{N}^{n+1} : \forall t \leq z \ (x_1,..,x_n,t) \in X\}$

⌈Bew: Nach (3.) genügt z.z.: $X_\exists$ prim. rek.

$\chi_{X_\exists}(\bar{x},z) = 1$ falls $\sum_{t=0}^{z} \chi_X(x,t) \geq 1$

und $\chi_\exists(\bar{x},z) = 0$ sonst ⌋

Beispiele: (1.) $q : \mathbb{N}^2 \to \mathbb{N}$ $q(x,y) = \begin{cases} \lfloor x/y \rfloor & \text{falls } y > 0 \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$
ist prim. rek.

⌈Bew: $q(x,y) = \mu t \leq x \ (t+1)\cdot y > x$ ⌋

(2.) $\{(x,y) \in \mathbb{N}^2 : x \mid y\}$ ist prim. rek.

⌈Bew: $x \mid y \Leftrightarrow \exists z \ z \cdot x = y \Leftrightarrow x = q(x,y) \cdot y$ ⌋

(3.) Die Menge aller Primzahlen $\mathbb{P}$ ist prim. rek.

⌈Bew: $x \in \mathbb{P} \Leftrightarrow x \geq 2 \wedge \forall y \leq x \ (y \mid x \to (y = 1 \vee x = 1))$
prim. rek nach 3.3. (4) & (3.) ⌋

(4.) Sei $\mathbb{P} = \{p_0, p_1, p_2, ...\}$ mit $p_i < p_{i+1}$ und sei
$\pi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}, \ n \mapsto p_n$

Dann ist π prim. rek.

⌈Bew: $\pi(0) = 2$

$\pi(x+1) = \mu z \leq (\pi(x)! + 1) \ z > \pi(x) \wedge z \in \mathbb{P}$

⌊ da $p! + 1$ von keiner PZ $q \leq p$ geteilt wird.

(5.) $\alpha_2 : \mathbb{N}^2 \to \mathbb{N}$, $\alpha_2(x,y) = \frac{1}{2}(x+y+1)(x+y) + x$
ist eine prim. rek. Bijektion.

Außerdem ex. prim. rek. $\beta_1^2, \beta_2^2 : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ mit
$\alpha_2(\beta_1^2, \beta_2^2) = id_{\mathbb{N}}$

⌈Bew: Erster Teil klar. Es gilt $\alpha_2(x,y) \geq \min(x,y)$

Dann $\beta_1^2(x) = \mu z \leq x \ \exists t \leq x \ \alpha_2(z,t) = x$.

β_2^2 analog

⌊

$\rightsquigarrow$ erhalte induktiv für $n \geq 2$ prim. rek. Bijektionen $\alpha_n : \mathbb{N}^n \to \mathbb{N}$, deren Inverses primitiv rekursive Komponenten $\beta_1^n, \dots, \beta_n^n$ hat, nämlich mittels $\alpha_{n+1}(x_1, \dots, x_{n+1}) = \alpha_n(x_1, \dots, x_{n-1}, \alpha_2(x_n, x_{n+1}))$

Lemma 3.4: Sei $\mathbb{N}^* = \bigcup_{n \geq 0} \mathbb{N}^n$ die Menge der endl. ~~vo~~ Folgen natürlicher Zahlen. Die Abb.

$$\langle . \rangle : \mathbb{N}^* \to \mathbb{N}$$

$$\langle x_0, \dots, x_{n-1} \rangle \mapsto p_0^{x_0} \cdots p_{n-2}^{x_{n-2}} p_{n-1}^{x_{n-1}+1} - 1$$

ist eine Bijektion. Es gilt:

(a) Die zweistellige Komponentenfkt $(x)_i$, definiert durch $(\langle x_0, \dots, x_{n-1} \rangle)_i = \begin{cases} x_i & i < n \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$ ist prim. rek.

(b) Die Längenfkt $\lg(x)$, definiert durch
$$\lg(\langle x_0, \dots, x_{n-1} \rangle) = n$$
ist prim. rek.

(c) Für alle n ist $\langle . \rangle : \mathbb{N}^n \to \mathbb{N}$ prim. rek.

(d) Für alle x ist $\lg(x) \leq x$. Wenn $x > 0$ ist $(x)_i < x$ für alle $i \in \mathbb{N}$.

Wir nennen $\langle x_0, \dots, x_{n-1} \rangle$ die Gödelnummer von $(x_0, \dots, x_{n-1})$

Bew: (c): Folgt aus Lemma 3.3

(d) klar.

(b) Es gilt $\lg(x) = \begin{cases} 0 & x = 0 \\ \mu y \; \forall z < x (y \leq z \to \pi(z) \nmid (x+1)) & \text{sonst} \end{cases}$

~~yxxx Wegeaxxx~~ Da y durch x beschränkt ist, ist $\lg(x)$ prim. rek. nach 3.3.

(a) Es gilt

$$(x)_i = \begin{cases} 0 & i \geq \lg(x) \\ \mu y \leq x \, (\pi(i)^{y+2} \nmid (x+1)) & i+1 = \lg(x) \\ \mu y \leq x \, (\pi(i)^{y+1} \nmid (x+1)) & i+1 < \lg(x) \end{cases}$$

$\boxtimes$

Nun: Rückrichtung von Satz 3.1.

Kodierung einer Turingmaschine

Identifiziere $\Gamma = \{b, 0, 1\}$ mit $\{0, 1, 2\}$, $\{L, R\}$ mit $\{0, 1\}$
$L \mapsto 0, R \mapsto 1$

via $b \mapsto 0$, $0 \mapsto 1$, $1 \mapsto 2$

TM M, Zustände $\{0, \dots, m\}$, $q_0 = 0$, $F = \{q_m\}$

Beweisidee:

- Kodiere die Konfigurationen einer TM als natürliche Zahlen
- Zeige: Der Übergang von einer Konfig. in die nächste ist prim. rek.
- Kodiere nun endl. Folgen von Konf. als natürliche Zahlen. $(x_1, \dots, x_n)$
- Zeige, dass die folgenden Operationen prim. rek sind:
  - Überprüfen, ob x_0 eine Startkonf. codiert
  - Überprüfen, dass x_{i+1} die Nachfolgekonf. zu x_i ist
  - Überprüfen, ob x_{n-1} eine akz. Konfiguration ist.
- Schließlich: "Für Startkonf. x_0 existiert ein akz. Lauf $(x_0, \dots, x_{n-1})$" ist rekursiv.

Kodiere $\delta : \overset{Q \setminus F}{\{0, \dots, m-1\}} \times \overset{\Gamma}{\{0, 1, 2\}} \to \overset{Q}{\{0, \dots, m\}} \times \Gamma \times \overset{L\ \ R}{\{0, 1\}}$

Sei $\rho = (q, \gamma) \in Q \setminus F \times \Gamma$ mit $\delta(q, \gamma) = (q', \gamma', \varepsilon)$. Setze
$r_1(\rho) := \alpha_2(q, \gamma)$ und $r_2(\rho) = \alpha_3(q', \gamma', \varepsilon)$ und

$$\ulcorner \delta \urcorner := \prod_{\substack{\rho \in Q \setminus F \times \Gamma \\ \delta(\rho) \text{ ist definiert}}} \pi(r_1(\rho))^{r_2(\rho)}$$

⇝ Können dekodieren mittels

$$\tilde{\delta}(i, x) = \mu z \leq x \, (\pi(i)^{z+1} \nmid x), \quad \text{da}$$

$$\tilde{\delta}(\alpha_2(q, \gamma), \ulcorner \delta \urcorner) = \alpha_3(q', \gamma', \varepsilon)$$

⇝ Kodiere TM M als $\alpha_2(m, \ulcorner \delta \urcorner)$

~~Lemma 3.8: Die Menge TM = {⌜M⌝ : M ist TM} ist prim. rek.~~