§ 3 Rekursionstheorie :

Idee: $f: \mathbb{N}^n \to \mathbb{N}$ heißt berechenbar, wenn es eine TM gibt, die f berechnet
↑ Modell eines Computers

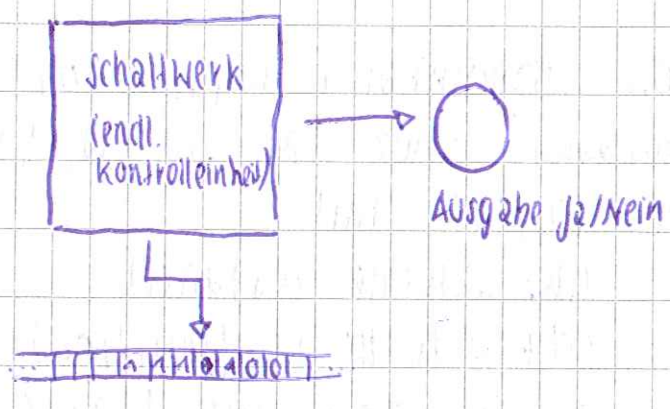
Fakt: Sei $f: \mathbb{N}^n \to \mathbb{N}$ eine Funktion. Dann sind äquivalent:
(1.) f ist Turing-berechenbar
(2.) f ist in einer 'üblichen' Programmiersprache berechenbar (z.B. C, Pascal, Java, C++, R, Haskell..)

Churchsche These: Jede (intuitiv irgendwie) berechenbare Fkt. $f: \mathbb{N}^n \to \mathbb{N}$ ist Turing-berechenbar

Ziele · Definiere TM etc
· Zeige $f: \mathbb{N}^n \to \mathbb{N}$ berechenbar gdw. rekursiv.

starte mit einfachen Grundfkt.,
(d.h. Nachfolger, Projektionen, Konstanten)
wende einfache Regeln auf diese an.

§ 3.1 Turingmaschinen & rek. Fkt.



Def: Eine Turingmaschine T ist ein 7-Tupel $(Q, \Gamma, b, \Sigma, \delta, q_0, F)$ mit:

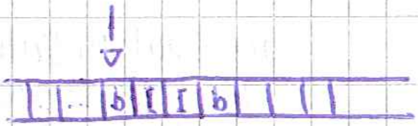
- einer endl. Zustandsmenge Q,
- dem endl. Eingabealphabet Σ, dem endl. Arbeitsalphabet Γ mit $\Sigma \subseteq \Gamma$
- $b \in \Gamma$ (dem Blanksymbol) mit $b \notin \Sigma$
- $\delta : (Q \setminus F) \times \Gamma \to Q \times \Gamma \times \{L, R\}$ einer partiellen Funktion (der Übergangsfunktion)
- $q_0 \in Q$ der Startzustand
- $F \subset Q$ eine nicht-leere Menge (die finalen Zustände)

Bsp: $\Gamma = \{b, I\}$, $\Sigma = I$

$Q = \{0, 1\}$ $\quad q_0 = 0 \quad F = \{1\}$

$\delta(\cancel{\ } (0, b)) = (0, b, R)$

$\delta((0, I)) = (1, I, R)$



Idee: TM testet, ob sich rechts vom Lesekopf eine 1 befindet.
Wenn ja: Ende. Wenn nein: Weitersuchen.

Idee: Konfiguration: Bandinhalt + Kopfposition + aktueller Zustand.

Def: Eine Konfiguration einer TM $T = (Q, \Gamma, b, \Sigma, \delta, q_0, F)$ ist ein Tripel (q, p, t) mit

1. $q \in Q$ (der aktuelle Zustand)
2. $p \in \mathbb{Z}$ (die aktuelle Kopfposition)
3. $t : \mathbb{Z} \to \Gamma$ Funktion mit $|\{z \in \mathbb{Z} \mid t(z) \neq b\}| < \infty$ (der Bandinhalt)

Def: Eine Konfiguration $C=(q,p,t)$ von T heißt
- Startkonfiguration, wenn $q=q_0$, $p=0$ und $\forall p\in\mathbb{Z}: t(p)\in\Sigma\cup\{b\}$, $\forall p<0\ t(p)=b$ gilt
- akzeptierend, wenn $q\in F$ gilt
- verwerfend, wenn $q\notin F$ gilt und $\delta(q, t(p))$ nicht definiert ist.

Def: Ein Lauf einer TM T ist eine endl. Folge von Konfigurationen $S_0=(q_0,p_0,t_0),\dots,S_n=(q_n,p_n,t_n)$ von T mit
- S_0 ist Startkonfiguration
- $\delta(q_i, t_i(p_i)) = (q_{i+1}, t_{i+1}(p_i), L)$ falls $p_{i+1}-p_i=-1$
  $\delta(q_i, t_i(p_i)) = (q_{i+1}, t_{i+1}(p_i), R)$ falls $p_{i+1}-p_i=1$
- S_n ist akzeptierend oder verwerfend.
  $S_0,\dots,S_{n-1}$ sind weder akz. noch verwerfend.

Abh. von dem letzten Zustand (d.h. von S_n) heißt der Lauf verwerfend oder akzeptierend.

Ab jetzt $\Gamma=\{0,1,b\}$
↪ kann alle anderen endl. Alphabete emulieren
(durch Folgen von 1en; 0er sind Trenner)

⇝ erhalte zu TM T berechenbare partielle Fkt

Bandinhalt der Startkonfiguration S_0

$\downarrow T$

$$\begin{cases} \text{Bandinhalt der akz. Konfiguration } S_n \\ \quad \text{(falls es einen akz. Lauf } S_0,\dots,S_n \text{ gibt)} \\ \text{sonst undefiniert} \end{cases}$$

Def: Sei $m \in \mathbb{N}$

- Ein Bandinhalt $t: \mathbb{Z} \to \{0, 1, b\}$ repräsentiert ein m-Tupel $(n_1, \ldots, n_m) \in \mathbb{N}^m$, wenn gilt:

Position 0

$$\ldots \boxed{b}\boxed{b}\underbrace{\boxed{1}\ldots\boxed{1}}_{n_1\text{-mal}}\boxed{0}\underbrace{\boxed{1}\ldots\boxed{1}}_{n_2\text{-mal}}\boxed{0}\ldots\boxed{0}\underbrace{\boxed{1}\ldots\boxed{1}}_{n_m\text{-mal}}\boxed{b}\boxed{b}\ldots$$

- Eine partielle Funktion $f: \mathbb{N}^m \to \mathbb{N}$ heißt ~~tur~~ (Turing-)berechenbar, wenn es eine TM M gibt, s.d. gilt:
  (1.) Für alle $(n_1, \ldots, n_m) \in dom(f)$ ex. ein akz. Lauf $\delta_0, \ldots, \delta_e$ von M mit $\delta_0 = (q_0, 0, t)$, wobei t die Fkt ist, die $(n_1, \ldots, n_m)$ repräsentiert, so dass der Bandinhalt von δ_e $f(n_1, \ldots, n_m)$ repräsentiert.
  (2.) Für alle $(n_1, \ldots, n_m) \in \mathbb{N}^m \setminus dom(f)$ existiert kein akzeptierender Lauf.

Wir sagen dann, dass M f berechnet.

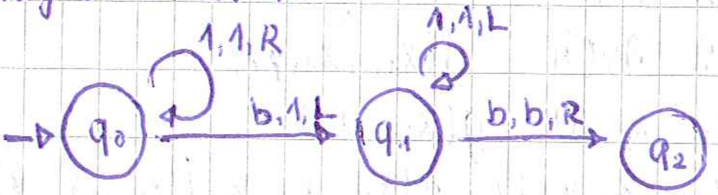
Bsp: $f: \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, $f(x) = x+1$ ist berechenbar.

Modulbeschreibung von M

(1) Lese aktuelles Zeichen. Falls $t(p) = 1$, rücke Lesekopf nach ~~links~~ rechts. Falls $t(p) = b$, schreibe 1, rücke Kopf nach links und gehe zu Schritt (2).
Wiederhole.

(2) Lese aktuelles Zeichen. Falls $t(p) = 1$, rücke Lesekopf nach links. Falls $t(p) = b$, rücke Lesekopf nach rechts und wechsele in akz. Zustand.
Wiederhole, falls nicht in akz. Zustand.

Diagramm zu M:



$Q = \{q_0, q_1, q_2\}$ $F = \{q_2\}$, δ wie im Diagramm

Bem: - Sowohl Modulbeschreibungen als auch ~~Diagramme~~ Fluss-Diagramme können zur Beschreibung von TM benutzt werden. Auch Mischformen sind möglich!

- Es gibt noch viele weitere Def. von TM, bspw. Halbband (Band $\hat{=}$ $\mathbb{N}$) oder Mehrband (endl. viele Bänder) oder der Lesekopf kann auch "still halten" (zusätzlich zu R und L). Alle berechnen die gleichen Fkt. (siehe BT-Vorlesung).

Ziel des Kapitels: $f: \mathbb{N}^m \to \mathbb{N}$ ~~[illegible]~~ totale Fkt ist berechenbar gdw. f rekursiv ist.

Def: Eine Funktion $f: \mathbb{N}^m \to \mathbb{N}$ (für $m \geq 0$) heißt rekursiv, wenn sie sich aus den Grundfkt.

(R0) $s(x) = x+1$ (Nachfolgerfkt)

$I_i^n(x_1, \dots, x_m) = x_i$ $(1 \leq i \leq m)$ (Proj. fkt.)

$C_0^0 = 0$ nullstellig (Konstante Fkt.)

durch Anwenden der folgenden Regeln aufbauen lässt:

(R1) (Einsetzung): sind $g_1, \dots, g_k: \mathbb{N}^n \to \mathbb{N}$ und $h: \mathbb{N}^k \to \mathbb{N}$ rekursiv, dann auch

$f(x_1, \dots, x_n) = h(g_1(x_1, \dots, x_n), \dots, g_k(x_1, \dots, x_n))$

(R2) (Primitive Rekursion) Sind $g: \mathbb{N}^n \to \mathbb{N}$, $h: \mathbb{N}^{n+2} \to \mathbb{N}$ rekursiv, dann auch $f(x_1, \dots, x_n, y)$,

wobei $f(x_1, \dots, x_n, 0) = g(x_1, \dots, x_n)$

und $f(x_1, \dots, x_n, y+1) = h(x_1, \dots, x_n, y, f(x_1, \dots, x_n, y))$

(R3) (μ-Rekursion) $g: \mathbb{N}^{n+1} \to \mathbb{N}$ rekursiv mit $\forall x_1, \dots, x_n \; \exists y \; g(x_1, \dots, x_n, y) = 0$. Dann ist auch

$f(x_1, \dots, x_n) = \mu y \, (g(x_1, \dots, x_n, y) = 0)$

rekursiv, wobei

$\mu y \, A(y)$ = "das kleinste y mit $A(y)$"

Bem: Verwendet man nur R0, R1 und R2, dann heißt f primitiv rekursiv.

Bsp: $C_m^n(x_1, \dots, x_n) = m$ ist primitiv rekursiv.

Bew: $C_{m+1}^0 = S(C_m^0)$

$C_m^n = C_m^0$ mit ($k=0$)-vielen n-stelligen Fkt.

Satz 3.1: Die berechenbaren Fkt. stimmen mit den rekursiven Fkt. überein.

Bew "$\Leftarrow$" dieser Abschnitt

"$\Rightarrow$" dauert länger

Bew von 3.1:

(R0): $S(x) = x+1$: ✓

$I_i^n(x_1, \dots, x_n) = x_i$: ÜA.

C_0^0 TM macht nichts