Sei F eine L_{Me}-Formel, deren Negation allgemeingültig ist, z.B. $\exists x\ \neg x \doteq x$ oder $\neg \underline{0} \doteq \underline{0}$.
Setze $CON_{ZFC} = \neg Bew(\ulcorner F \urcorner)$.

Satz 2.39 (Zweiter Gödelscher Unvollständigkeitssatz für ZFC)
Wenn ZFC widerspruchsfrei ist, dann gilt
$$ZFC \nvdash CON_{ZFC}.$$

Bem: Wenn CON_{ZFC} unbeweisbar ist, ist ZFC konsistent. (in einer inkons. Theorie ist jede Aussage beweisbar)
d.h. Satz 2.39 sagt
$$ZFC \vdash CON_{ZFC} \leftrightarrow \neg Bew(\ulcorner CON_{ZFC} \urcorner)$$

Bew. von Satz 2.39.
Sei ϕ Fml. mit
$(*)$ $ZFC \vdash \phi \leftrightarrow \neg Bew(\ulcorner \phi \urcorner)$ (ex. nach 2.36).
Beh: Zeige, dass $ZFC \vdash \phi \leftrightarrow CON_{ZFC}$ gilt:
Es gilt $ZFC \vdash F \rightarrow \phi$ und $ZFC \vdash Bew(\ulcorner F \urcorner) \rightarrow Bew(\ulcorner \phi \urcorner)$ nach 2.38 (1.) Also folgt
$ZFC \vdash \phi \rightarrow CON_{ZFC}$ mit $(*)$
Anders herum folgt aus $ZFC \vdash \phi \rightarrow \neg Bew(\ulcorner \phi \urcorner)$
2.38(1.) auch $ZFC \vdash Bew(\ulcorner \phi \urcorner) \rightarrow Bew(\ulcorner \neg Bew(\ulcorner \phi \urcorner) \urcorner)$
L3 $\rightsquigarrow$ $ZFC \vdash Bew(\ulcorner \phi \urcorner) \rightarrow Bew(\ulcorner \neg Bew(\ulcorner \phi \urcorner) \urcorner) \wedge Bew(\ulcorner Bew(\ulcorner \phi \urcorner) \urcorner)$
2.38 (2.) $ZFC \vdash Bew(\ulcorner \neg Bew(\ulcorner \phi \urcorner) \urcorner) \wedge Bew(\ulcorner Bew(\ulcorner \phi \urcorner) \urcorner) \rightarrow Bew(\ulcorner F \urcorner)$
Also $ZFC \vdash Bew(\ulcorner \phi \urcorner) \rightarrow \neg CON_{ZFC}$ $\boxtimes$ Beh.

Ang. $ZFC \vdash CON_{ZFC}$. Dann folgt $ZFC \vdash \phi$ (Beh)

L1 $ZFC \vdash Bew(\ulcorner\phi\urcorner)$

~~Be~~ * $ZFC \vdash \neg Bew(\ulcorner\phi\urcorner)$

$\Rightarrow$ ZFC ist inkonsistent. $\boxtimes$

Satz 2.40 (**Erster** Gödelscher Unvollständigkeitssatz für ZFC)
Wenn ZFC konsistent ist, dann gibt es eine Aussage R, die unabh. von ZFC ist, d.h.
$ZFC \nvdash R$, $ZFC \nvdash \neg R$.

Def: T-Theorie heißt vollständig, wenn
1.) T konsistent ist und
2.) $T \vdash \varphi$ oder $T \vdash \neg\varphi$ f.a. L-Aussagen φ.

Beispiel: (CH) ist unabh. von ZFC $\leadsto$ zu schwer für uns!

Bem: • Die Unvollständigkeitssätze gelten auch für wesentlich einfachere Theorien (etwa: Peanoarithmetik)
• Aber: Es gibt auch vollst. Theorien! Etwa
$\mathcal{M}$ L-Struktur, $T = Th(\mathcal{M}) = \{\varphi$ L-Aussage, $\mathcal{M} \models \varphi\}$
$\leadsto$ für T gilt der <u>erste</u> Unvollständigkeitssatz nicht.

Bem: Warum folgt 2.40 nicht aus 2.39?
(Also warum geht $R = CON_{ZFC}$ nicht?)
Weil es sein könnte, dass $ZFC \vdash \neg CON_{ZFC}$ gilt!

ÜA: $ZFC \nvdash \neg CON_{ZFC} \Rightarrow ZFC \nvdash \underset{Bew}{\wedge}(\ulcorner ZFC \nvdash CON_{ZFC}\urcorner)$

Sei nun $\phi_0, \phi_1, \ldots$ eine Liste aller in ZFC beweisbaren Aussagen. Beschreibe dies durch L_{Me}-Formel $Bew(x, y)$ "x ist die y-te beweisbare Aussage". Dann gilt:

$$\phi = \phi_n \Rightarrow ZFC \vdash Bew(\ulcorner\phi\urcorner, \underline{n})$$

$$\phi \neq \phi_n \Rightarrow ZFC \vdash \neg Bew(\ulcorner\phi\urcorner, \underline{n})$$

Für den Beweis von 2.40 (Erster Gödel)

Rosser-Trick: Sei ψ eine Aussage. Betrachte

$$Bew^*(\ulcorner\psi\urcorner) = \exists y \in \omega \big(\underbrace{Bew(\ulcorner\psi\urcorner, y)}_{\psi \text{ ist beweisbar}} \wedge \underbrace{\forall x < y \; \neg Bew(\ulcorner\neg\psi\urcorner, x)}_{\text{ein Stück von } CON_{ZFC}}\big)$$

Beh: Wenn ZFC kons. ist, gilt

$ZFC \vdash \psi \Rightarrow ZFC \vdash Bew^*(\ulcorner\psi\urcorner)$ (1.) und

$ZFC \vdash \neg\psi \Rightarrow ZFC \vdash \neg Bew^*(\ulcorner\psi\urcorner)$ (2.)

(falls ZFC inkons. ist, gelten (1.) & (2.) auch).

Bew. der Beh:

Ang. $ZFC \vdash \psi$. Dann gilt $\psi = \phi_n$ für ein n, d.h. es gilt $\neg\psi = \phi_0, \ldots, \neg\psi = \phi_{n-1}$ und

$ZFC \vdash Bew(\ulcorner\psi\urcorner, \underline{n})$

$ZFC \vdash \neg Bew(\ulcorner\neg\psi\urcorner, \underline{0}) \wedge \ldots \wedge \neg Bew(\ulcorner\neg\psi\urcorner, \underline{n-1})$

$ZFC \vdash \forall x < \underline{n} \; (x \doteq \underline{0} \vee \ldots \vee x \doteq \underline{n-1})$

$\Rightarrow ZFC \vdash Bew^*(\ulcorner\psi\urcorner)$

Ang. $ZFC \vdash \neg\psi$. Dann gilt $\neg\psi = \phi_n$ für ein n und $\psi \neq \phi_0, \phi_1, \ldots, \phi_n$ (weil ZFC widerspruchsfrei)

d.h. $ZFC \vdash \neg Bew(\psi, \underline{m})$ für alle $\underline{m} < \underline{n}$

$\Rightarrow ZFC \vdash \forall y \in \omega \; (Bew(\ulcorner\psi\urcorner, y) \rightarrow \underline{n} < y)$

$\Rightarrow ZFC \vdash \neg Bew^*(\ulcorner\psi\urcorner)$ ☑ Beh.

(wenn ψ beweisbar ist, ist der zweite Teil falsch)

Wähle nun mit (Fixpunktsatz) R so, dass

$ZFC \vdash R \Leftrightarrow \neg Bew^*(\ulcorner R \urcorner)$ gilt. (3.)

Dann folgt

$ZFC \vdash R \overset{(1.)}{\Rightarrow} ZFC \vdash Bew^*(\ulcorner R \urcorner) \overset{(3.)}{\Rightarrow} ZFC \vdash \neg R$

$\overset{(2.)}{\Rightarrow} ZFC \vdash \neg Bew^*(\ulcorner R \urcorner) \overset{(3.)}{\Rightarrow} ZFC \vdash R.$

Also $ZFC \vdash R \Leftrightarrow ZFC \vdash \neg R$

d.h. ZFC kons. $\Rightarrow$ R unabh. von ZFC. $\boxtimes$