Bew: Sei $\kappa = \aleph_{\beta+1} = \aleph_\beta^+$. Sei $\lambda \in On$ Limeszahl, dann gilt
$\lambda = \bigcup_{\gamma<\lambda} \gamma$. $X \subset \lambda$ ist konfinal gdw. $\lambda = \bigcup_{\gamma \in X} \gamma$
Sei $f: \alpha \to \kappa$ für ein $\alpha < \kappa$.
Dann gilt $\alpha \leq \aleph_\beta$ und nach 2.29 (3)
$$\left|\bigcup_{\beta<\alpha} f(\beta)\right| \leq \sup(\{|f(\beta)| : \beta < \alpha\} \cup \{\alpha\})$$
$$\leq \aleph_\beta \Rightarrow f \text{ nicht konfinal} \quad \boxtimes$$

Lemma
~~Prop~~ 2.33. Wenn $\lambda \in On$ Limeszahl ist, dann gilt
$cof(\aleph_\lambda) = cof(\lambda)$.

Bew: Sei $f: \alpha \to \lambda$ konfinal. Dann ist auch
$\tilde{f}: \alpha \to \aleph_\lambda$, $\beta \mapsto \aleph_{f(\beta)}$ konfinal, da
$\aleph_\lambda = \bigcup_{\gamma<\lambda} \aleph_\gamma$ gilt. $\Rightarrow cof(\aleph_\lambda) \leq cof(\lambda)$.
Sei $g: \alpha \to \aleph_\alpha$ konfinal. Die Funktion
$\tilde{g}: \alpha \to \lambda$
$$\tilde{g}(\beta) = \begin{cases} 0 & \text{falls } g(\beta) \text{ endl.} \\ \gamma & \text{falls } |g(\beta)| = \aleph_\gamma \end{cases}$$
ist konfinal $\boxtimes$

Prop 2.34: Seien κ, λ Kard.zahlen mit $\kappa \geq 2$ und $\lambda \geq \aleph_0$.
Dann gilt $cof(\kappa^\lambda) > \lambda$.

Bew: Sei $\alpha \in On$, $\alpha \leq \lambda$, $f: \alpha \to \kappa^\lambda$ Funktion.
Z: f nicht konfinal.
F.a. $\beta \in \alpha$ gilt $f(\beta) < \kappa^\lambda$
Satz von König $\Rightarrow$ $\left|\bigcup_{\beta<\alpha} f(\beta)\right| \leq \sum_{\beta<\alpha} |f(\beta)| \overset{\text{König}}{<} \prod_{\beta<\alpha} \kappa^\lambda = (\kappa^\lambda)^{|\alpha|}$
$= \kappa^{\lambda \cdot |\alpha|} \leq \kappa^\lambda$.
$\Rightarrow f$ ist nicht konfinal.

Korollar 2.35: $2^{\aleph_0} \neq \aleph_\omega$.
Bew: $cof(\aleph_\omega) \overset{2.33}{=} cof(\omega) = \omega = \aleph_0 \overset{2.34}{<} cof(2^{\aleph_0})$ $\boxtimes$

(lange Motivation für §3)

§2.4. Metamathematik von ZFC

Plan: kodiere L_{Me}-Formeln ψ mit Konstanten $\ulcorner\psi\urcorner$ (in der Erw. von ZFC)
$\leadsto$ erlaubt, über $Bew(\ulcorner\psi\urcorner)$ zu sprechen

1. Ordne jedem Zeichen von einen Term zu:

$$\ulcorner \dot{=} \urcorner = (\underline{0}, \underline{0}) \qquad \ulcorner v_0 \urcorner = (\underline{1}, \underline{0})$$
$$\ulcorner \wedge \urcorner = (\underline{0}, \underline{1}) \qquad \ulcorner v_1 \urcorner = (\underline{1}, \underline{1})$$
$$\ulcorner \neg \urcorner = (\underline{0}, \underline{2}) \qquad \ulcorner v_2 \urcorner = (\underline{1}, \underline{2})$$
$$\ulcorner (\urcorner = (\underline{0}, \underline{3}) \qquad \text{etc.}$$
$$\ulcorner) \urcorner = (\underline{0}, \underline{4})$$
$$\ulcorner \exists \urcorner = (\underline{0}, \underline{5})$$
$$\ulcorner \varepsilon \urcorner = (\underline{0}, \underline{6})$$

2. Für eine Formel $\psi = \zeta_0 \zeta_1 \zeta_2 \ldots \zeta_{n-1}$ (Zeichen von ψ) der Länge n setze
$$\ulcorner\psi\urcorner = \{(\underline{0}, \ulcorner\zeta_0\urcorner), (\underline{1}, \ulcorner\zeta_1\urcorner), \ldots, (\underline{n-1}, \ulcorner\zeta_{n-1}\urcorner)\}$$
(später $\ulcorner\psi\urcorner$ natürliche Zahl)

Satz 2.36 (Fixpunktsatz) Für jede L_{Me}-Fml $\Sigma(x)$ (nur eine freie Var.) gibt es eine Aussage ϕ mit
$$ZFC \vdash \phi \leftrightarrow \underbrace{\Sigma(\ulcorner\phi\urcorner)}$$
Genauer: L_{Me}-Fml, die zu $\Sigma(\ulcorner\phi\urcorner)$ äq. ist.

Lemma 2.37 Es gibt eine in ZFC def-bare Funktion sub mit
$$ZFC \vdash \ulcorner\psi(\ulcorner\phi\urcorner)\urcorner \dot{=} sub(\ulcorner\psi\urcorner, \ulcorner\phi\urcorner)$$
f.a. L_{Me}-Fml. $\phi, \psi(x)$

Bew: sub beschreibt einfach die Einsetzung in Formeln, etwa $\psi = \zeta_0 \ldots \zeta_n \, x \, \zeta_{n+2} \ldots \zeta_k$
$$\ulcorner\psi(\ulcorner\phi\urcorner)\urcorner = \ulcorner \zeta_0 \ldots \zeta_n \ulcorner\phi\urcorner \zeta_{n+2} \ldots \zeta_k \urcorner \qquad \boxtimes$$

Bew. von 2.36: Sei $\psi(v_0)$ die L_{Me}-Fml, die zu $\Sigma(\mathrm{Sub}(v_0, v_0))$ äquivalent ist. Dann sind in ZFC äquivalent:

$ZFC \vdash \psi(\ulcorner \psi \urcorner) \leftrightarrow \Sigma(\mathrm{Sub}(\ulcorner \psi \urcorner, \ulcorner \psi \urcorner)) \leftrightarrow \Sigma(\ulcorner \psi(\ulcorner \psi \urcorner) \urcorner)$

Setze nun $\phi = \psi(\ulcorner \psi \urcorner)$. ☑

2.37

Korollar (Tarski): Wenn ZFC widerspruchsfrei ist, dann gibt es keine Formel $W(x)$, s.d. für alle L_{Me}-Aussagen ϕ gilt ← Wahrheitsprädikat:

$ZFC \vdash \phi \leftrightarrow W(\ulcorner \phi \urcorner)$

Bew: Wähle mit 2.36 ϕ mit $ZFC \vdash \phi \leftrightarrow \neg W(\ulcorner \phi \urcorner)$.

⇝ "ϕ ist wahr" nicht in ZFC def-bar.

Anders: "ϕ ist beweisbar":

Sei $\mathfrak{M} = (M, \in)$, $\mathfrak{M} \models ZFC$.

L_{Me}-Formeln

$\mathrm{Zeichen}(x) \equiv x = (0,0) \vee \dots \vee x = (0,6)$
$\vee \exists y \in \omega \;\; x = (1, y)$

$\mathrm{Zeichen}(\mathfrak{m}) = \{(0,0), \dots, (0,6)\} \cup \{(1, y) : y \in \omega^{\mathfrak{m}}\}$

↑ nicht notw. nur 1, 2, 3, ...

$\mathrm{Formel}(x) =$ "x ist Funktion $f: n \to \mathrm{Zeichen}$ für ein $n \in \omega$."

⇝ $\mathrm{Formeln}(\mathfrak{m})$ kann auch (von außen betrachtet) unendl. lange Zeichenketten enthalten (hängt von ω in $\mathfrak{m}$ ab)

$ZFC(x) =$ "x ist ein Axiom von ZFC"

$\mathrm{Bew}(x) =$ "x ist eine in ZFC beweisbare L_{Me}-Aussage"

$Bew(m) = \{$Richtige Folgerungen$\} \cup \{$unendl. Folgerungen$\}$
$\cup \{$Folgerungen mit unendl. langen Beweisen$\}$

$Bew(x)$ erfüllt die Loeb-Axiome:

Warnung: Umkehrung gilt nicht!
$ZFC \nvdash \phi \not\Rightarrow ZFC \nvdash Bew(\ulcorner\phi\urcorner)$

L1 $ZFC \vdash \phi \Rightarrow ZFC \vdash Bew(\ulcorner\phi\urcorner)$

L2 $ZFC \vdash Bew(\ulcorner\phi\urcorner) \wedge Bew(\ulcorner\phi \rightarrow \psi\urcorner) \rightarrow Bew(\ulcorner\psi\urcorner)$

L3 $ZFC \vdash Bew(\ulcorner\phi\urcorner) \rightarrow Bew(\ulcorner Bew(\ulcorner\phi\urcorner)\urcorner)$

Schwer zu zeigen, dass L3 gilt! Zeigen wir nur im nächsten Kapitel

Folgerung 238 (aus L1 & L2)

(1.) $ZFC \vdash \phi \rightarrow \psi \Rightarrow ZFC \vdash Bew(\ulcorner\phi\urcorner) \rightarrow Bew(\ulcorner\psi\urcorner)$

(2.) $ZFC \vdash Bew(\ulcorner\phi \wedge \psi\urcorner) \leftrightarrow (Bew(\ulcorner\phi\urcorner) \wedge Bew(\ulcorner\psi\urcorner))$

Bew: (1) $ZFC \vdash \phi \rightarrow \psi \overset{L1}{\Rightarrow} ZFC \vdash Bew(\ulcorner\phi \rightarrow \psi\urcorner)$

$\overset{L2}{\Rightarrow} ZFC \vdash Bew(\ulcorner\phi\urcorner) \rightarrow Bew(\ulcorner\psi\urcorner)$

(2.) Aus (1.) folgt

$ZFC \vdash Bew(\ulcorner\phi \wedge \psi\urcorner) \rightarrow Bew(\ulcorner\phi\urcorner)$

und

$ZFC \vdash Bew(\ulcorner\phi \wedge \psi\urcorner) \rightarrow Bew(\ulcorner\psi\urcorner)$

und

$ZFC \vdash Bew(\ulcorner\phi\urcorner) \rightarrow Bew(\ulcorner\psi \rightarrow (\phi \wedge \psi)\urcorner)$

Wg. L2 gilt

$ZFC \vdash Bew(\ulcorner\psi\urcorner) \wedge Bew(\ulcorner\psi \rightarrow (\phi \wedge \psi)\urcorner)$
$\rightarrow Bew(\ulcorner\phi \wedge \psi\urcorner)$

Zusammen folgt

$ZFC \vdash Bew(\ulcorner\phi\urcorner) \wedge Bew(\ulcorner\psi\urcorner) \rightarrow Bew(\ulcorner\psi \wedge \phi\urcorner)$ ☒