Kard.zahl: $\alpha \in On$ mit $\alpha = |\alpha|$. Bem: $|\alpha+1| = |\alpha|$, falls $\alpha \geq \omega$.

Lemma 2.23. Sei X eine Menge von Kard.zahlen. Dann ist $\lambda = \sup_{\kappa \in X} \kappa := \bigcup_{\kappa \in X} \kappa$ auch eine Kard.zahl.

Bew: Zeige zunächst: $\lambda \in On$.
λ transitiv, da Vereinigung transitiver Mengen.
λ total geordnet, da $\lambda \subset On$ (siehe Lemma 2.14)
Sei $\beta < \lambda$, dann ex. $\kappa \in X$ mit $\beta < \kappa$.
κ Kard.zahl $\Rightarrow \kappa = |\kappa| \leq |\lambda| \Rightarrow \beta < |\lambda|$
$\Rightarrow \lambda$ nicht gleichmächtig zu einer Ord.zahl $\beta < \lambda$. ☑

Def: Die $\aleph$-Hierarchie ordnet jedem $\alpha \in On$ eine Kard.zahl wie folgt zu:
- $\aleph_0 = \omega$
- $\aleph_{\alpha+1} = \aleph_\alpha^+$
- $\aleph_\alpha = \sup_{\beta<\alpha} \aleph_\beta$, wenn α Limeszahl.

Prop 2.24: Jede unendl. Kardzahl ist von der Form $\aleph_\alpha$ für eine Ord.zahl α.

Lemma 2.25: Seien $\alpha, \beta \in On$, $f: \alpha \to \beta$ streng monoton wachsende Fkt. Dann gilt f.a. $\gamma \in \alpha$: $f(\gamma) \geq \gamma$.

Bew: Ang. $f(\gamma) < \gamma$. Sei $\gamma_0 \in \alpha$ min. mit dieser Eigenschaft. f mon. wachsend
$\Rightarrow f(\gamma_0) > f(f(\gamma_0))$ ↯ zur Min. von γ_0.

Bew. von 2.24: Sei κ unendl. Kard.zahl. Dann ist
$f: \kappa+1 \to \aleph_{\kappa+1}$, $\beta \mapsto \aleph_\beta$ str. mon. wachsend.

$\overset{2.25}{\Rightarrow}$ $\aleph_\kappa \geq \kappa$ $\Rightarrow$ $\aleph_{\kappa+1} > \kappa$.

Sei $\alpha \leq \kappa+1$ min. mit $\aleph_\alpha > \kappa$. κ unendl. $\Rightarrow$ $\alpha > 0$.

Falls $\alpha \in On$ Limeszahl $\overset{\text{Def } \aleph_\alpha}{\Rightarrow}$ $\kappa \in \bigcup_{\beta<\alpha} \aleph_\beta$

$\Rightarrow$ $\kappa \in \aleph_\beta$ für ein $\beta < \alpha$ $\lightning$ zur Min. von α.

$\Rightarrow$ $\alpha = \beta + 1$ und $\aleph_\beta \leq \kappa < \aleph_{\beta+1} = \aleph_\beta^+$

$\aleph_\beta^+$ ist der Nachfolger von $\aleph_\beta$ $\Rightarrow$ $\kappa = \aleph_\beta$ ☑

§ Kard.zahlarithmetik.

X, Y Mengen. Schreibe $X+Y$ für die disjunkte Vereinigung (etwa $X+Y = X \times \{0\} \cup Y \times \{1\}$) und $X \times Y$ für das Produkt. X^Y für die Menge der Fkt. von Y nach X.

κ, λ Kard.zahlen. Schreibe $\kappa+\lambda$ für $|\kappa+\lambda|$, $\kappa \cdot \lambda$ für $|\kappa \times \lambda|$ und κ^λ für $|\kappa^\lambda|$.

Lemma 2.26 (1.) a, b endl., disjunkt, $|a \cup b| = |a| + |b|$

(2.) $m, n \in \omega$ $\Rightarrow$ $|m \times n| = m \cdot n$.

Bew: klar.

Bem: · Ordinalzahlarithmetik ist anders definiert!

etwa $2^\omega = \omega = \aleph_0 < 2^{\aleph_0}$

$" \sup_{m\in\omega} 2^n "$

· $|X+Y| = |X| + |Y|$

· $|X \times Y| = |X| \cdot |Y|$

· $|X^Y| = |X|^{|Y|}$

Lemma 2.27 Seien $\kappa', \kappa, \lambda, \mu$ Kardzahlen. Es gilt

(1.) $\kappa + \mu = \mu + \kappa$, $\kappa \cdot \mu = \mu \cdot \kappa$, $(\kappa \cdot \mu) \cdot \lambda = \kappa \cdot (\mu \cdot \lambda)$

$(\kappa + \mu) + \lambda = \kappa + (\mu + \lambda)$, $\kappa(\mu + \lambda) = \kappa\mu + \kappa\lambda$

(2.) $\kappa^{\lambda+\mu} = \kappa^\lambda \cdot \kappa^\mu$, $(\kappa^\lambda)^\mu = \kappa^{\lambda\mu}$, $(\kappa\lambda)^\mu = \kappa^\mu \lambda^\mu$

(3.) $\kappa \leq \kappa' \Rightarrow \kappa + \lambda \leq \kappa' + \lambda$, $\kappa\lambda \leq \kappa'\lambda$

falls $\kappa > 0$: $\kappa^\lambda \leq (\kappa')^\lambda$

falls $\lambda > 0$ $\lambda^\kappa \leq \lambda^{\kappa'}$

Bew: leicht.

Satz 2.28 (Hesseberg): Für jede unendl. Kardzahl κ gilt $\kappa \cdot \kappa = \kappa$. (Alternativ: X unendl. $\Rightarrow |X| = |X \times X|$)

Bew: Übung.

Lemma 2.29 (+ und $\cdot$ sind langweilig)

(1.) $X, Y \neq \emptyset$, $\max(|X|, |Y|) \geq \aleph_0$

Dann $|X \cup Y| = |X \times Y| = \max(|X|, |Y|)$

(2.) $\kappa \geq \aleph_0$; $\lambda > 0$ Kardzahlen. Dann:

$\kappa + \lambda = \kappa \cdot \lambda = \max(\kappa, \lambda)$.

d.h. I Menge, f.a. $i \in I$ ist X_i Menge

(3.) $(X_i)_{i \in I}$ Familie von Mengen, mind. ein X_i unendl.

Dann $|\bigcup_{i \in I} X_i| \leq \sup(\{|X_i| : i \in I\} \cup \{|I|\})$

Insbes. ist eine abz. Vereinigung abz. Mengen abz.

Falls die X_i alle p.w. disjunkt und nicht-leer sind, gilt Gleichheit.

Bew: (1.) Sei $\kappa = \max(|X|, |Y|)$

$\kappa \leq |X \cup Y| \leq \kappa + \kappa \leq \kappa \cdot \kappa$. Fertig mit 2.28.

(2.) Spezialfall von (1.)

(3.) Sei $X = \{(x_i, i) : x_i \in X_i \text{ für ein } i \in I\}$ die disj. Vereinigung der X_i.

Es gibt eine kan. Surj. $X \to \bigcup_{i\in I} X_i$, d.h. zeige
$|X| \leq \sup(\{|X_i| : i \in I\} \cup \{|I|\})$
Sei $\kappa = \sup(\{|X_i| : i \in I\})$ und Y_i die Menge der inj. Fkt.
$f: X_i \to \kappa$. Wegen $Y_i \neq \emptyset$ f.a. i gilt ex. $f = (f_i)_{i\in I} \in \prod_{i\in I} Y_i$
$\Rightarrow$ $g: X \to \kappa \times I$ $(x_i, i) \mapsto (f_i(x_i), i)$ ist inj.
$\Rightarrow |X| \leq \kappa \cdot |I| = \max(\kappa, |I|)$ nach (2.)

$|\bigcup_{i\in I} X_i| \geq \sup_{i\in I} |X_i|$ klar.
Sei $X_i \neq \emptyset$ f.a. $i \in I$, X_i p.w. disjunkt
$\Rightarrow |\bigcup_{i\in I} X_i| \geq |I|$ ☑

Potenzieren ist nicht langweilig:
Kontinuumshypothese (CH) $2^{\aleph_0} = \aleph_1$

Fakt (Cohen 63 [kons. ¬CH], Gödel 38 [kons. CH]) Wenn ZFC widerspruchsfrei ist, kann (CH) in ZFC weder bewiesen noch widerlegt werden

Bem: Genauso für (GCH) (f.a. $\kappa \geq \aleph_0$ gilt $2^\kappa = \kappa^+$)

Wir zeigen nun: $2^{\aleph_0} \neq \aleph_\omega$.
Notation: $(\kappa_i)_{i\in I}$ Familie von Kard.zahlen. Schreibe
$\sum \kappa_i$ für die Kard. der disj. Vereinigung
und $\prod \kappa_i$ für die Kard. des Produkts.

Prop 2.30 (Satz von König): Seien $(\kappa_i)_{i\in I}$, $(\lambda_i)_{i\in I}$ Fam. von Kard.zahlen mit $\kappa_i < \lambda_i$ für jedes $i \in I$.
Dann gilt $\sum_{i\in I} \kappa_i < \prod_{i\in I} \lambda_i$

Bew: Sei $f: \sum_{i\in I} \kappa_i \to \prod_{i\in I} \lambda_i$ Funktion. Zeige: f nicht surj.

Für jedes $i \in I$ induziert f Fkt.: $f_i : \kappa_i \to \lambda_i$

($f_i(\mu)$ ist die i-te Komponente von $f|_{\kappa_i}(\mu)$)

Wegen $\kappa_i < \lambda_i$ ist $B_i := \lambda_i \setminus \mathrm{Im}(f_i) \neq \emptyset$ f.a. $i \in I$

Auswahlax. $\Rightarrow$ ex. $b \in \prod_{i\in I} B_i \subset \prod_{i\in I} \lambda_i$

Offensichtlich gilt $b \notin \mathrm{Im}(f)$ $\Rightarrow$ f nicht surj. ☐

§ Kofinalität

Def: · Sei X linear geord. Menge. $Y \subset X$ heißt kofinal in X wenn Y nicht in X beschränkt ist, d.h. f.a. $x \in X$ ex. $y \in Y$ mit $x \leq y$.

· Sei $f: \beta \to \alpha$ Fkt zwischen Ord.zahlen α, β. f heißt kofinal, wenn $\mathrm{Im}(f) \subset \alpha$ kofinal ist.

· Die Kofinalität von $\alpha \in On$ (schreibe $cof(\alpha)$) ist die kleinste Ord. β s.d. es eine kofinale Fkt $f: \beta \to \alpha$ gibt.

Bsp: · $cof(\underline{0}) = \underline{0}$

· $cof(\alpha + 1) = 1$ f.a. $\alpha \in On$

· $cof(\omega) = \omega$ ("$\leq$" via $f = id$

"$\geq$" da jede endl. TM von ω ein größtes Elem. hat)

Prop. 2.31 Sei $\alpha \in On$

(1.) $cof(\alpha) \leq \alpha$

(2.) $cof(\alpha)$ ist eine Kard.zahl.

(3.) $cof(\alpha)$ ist die kleinste Ord.zahl β, s.d. es eine kofinale str. mon. wachsende Fkt $f: \beta \to \alpha$ gibt

(4.) $\mathrm{cof}(\mathrm{cof}(\alpha)) = \mathrm{cof}(\alpha)$.

Bew: (1.) klar.

(2.) Jedes $\beta \in On$ ist in Bij. mit $|\beta|$.

d.h. ~~[illegible]~~ ex. $f: |\mathrm{cof}(\alpha)| \to \alpha$ kofinal.

(3.) Zeige: Ex. $\beta \leq \mathrm{cof}(\alpha)$ und $f: \beta \to \alpha$ konfinal & str. mon. wachsend.

Sei $h: \mathrm{cof}(\alpha) \to \alpha$ konfinal. Betrachte

$X := \{x \in \mathrm{cof}(\alpha) : h(y) < h(x)$ für jedes $x < y\}$

Beh: $h[X]$ ist konfinal in α.

Bew: Sei $\gamma < \alpha$: h konf. $\Rightarrow$ ex. $y \in \mathrm{cof}(\alpha)$, $h(y) \geq \gamma$. Sei y_0 min. mit dieser Eigenschaft. $\Rightarrow y_0 \in X$. ☒Beh

Sei $\tilde{f}: (\beta, \in) \cong (X, <)$ (nach WOSatz), dann gilt $\beta \leq \mathrm{cof}(\alpha)$ und $f = h \circ \tilde{f}$ ist konfinal und str. mon. wachsend.

(4.) $\mathrm{cof}(\mathrm{cof}(\alpha)) \leq \mathrm{cof}(\alpha)$ nach (1.)

Sei $f: \mathrm{cof}(\mathrm{cof}(\alpha)) \to \mathrm{cof}(\alpha)$ und

$g: \mathrm{cof}(\alpha) \to \alpha$ s.m.w und konfinal nach (3.)

Dann ist $g \circ f: \mathrm{cof}(\mathrm{cof}(\alpha)) \to \alpha$ konfinal ☒

Def: Eine unendl. Kard.zahl κ heißt regulär, wenn $\mathrm{cof}(\kappa) = \kappa$ gilt. Falls $\mathrm{cof}(\kappa) < \kappa$ gilt, heißt κ singulär.

Lemma 2.32: Jede unendl. Kard.zahl, die eine Nachfolgerkard.zahl ist, ist regulär. Insbes. ist $\aleph_1$ regulär.

Frage: Warum ist dies kein Widerspruch zu $\mathrm{cof}(\alpha+1) = 1$ f.a. $\alpha \in On$?