Abstimmung: Registermaschinen vs. Turingmaschinen

Def: Sei X eine Menge. Eine Funktion $f: X \to V$ mit $f(z) \in z$ für alle $z \in X$ heißt Auswahlfunktion.

Erinnerung: (Auswahlaxiom): Jede Menge nicht-leerer Mengen hat Auswahlfunktion.

Bem: Wenn $\bigcup X$ eine Wohlordnung besitzt, existiert eine Auswahlfunktion auf X (ohne Annahme des Auswahlaxioms): $f(z) := \min(z)$.
Nun: Umkehrung!

2.17
Satz (Wohlordnungssatz, Zermelo) Jede Menge hat eine Wohlordnung.

Bew: Sei A Menge und $* \notin A$. Wähle Auswahlfunktion $g: \mathcal{P}(A) \setminus \{\emptyset\} \to A$.
Definiere $F: On \to A \cup \{*\}$ mittels

$$F(\beta) = \begin{cases} g(A \setminus F[\beta]) & \text{wenn } A \not\subseteq F[\beta] \\ * & \text{sonst} \end{cases}$$

Wie im letzten Beweis: ex. $\alpha \in On$ mit $f = F\restriction_\alpha : \alpha \to A$ Bijektion. Diese Abb. transportiert die WO von α nach A: Setze $a_1 < a_2 \iff f^{-1}(a_1) < f^{-1}(a_2)$ $\square$

Satz 2.18 (Zornsches Lemma): Sei $(A, <)$ eine partielle Ordnung, in der jede linear geordnete TM K eine obere Schranke besitzt (d.h. für jedes lin. geordnete K ex. $s \in K$ mit $k \leq s$ f.a. $k \in K$). Dann besitzt A ein maximales Element m (d.h. $m \in A$ und f.a. $a \in A$ gilt $a \leq m$).

<u>Bew</u>: ~~Das~~ Sei $G: V \to V$ Funktional mit

$$G(x) = \begin{cases} \text{eine echte obere Schranke von } x & \text{falls } x \subset A \text{ und } x \text{ eine echte obere Schranke hat} \\ * & \text{sonst} \end{cases}$$

(für $* \notin A$)

Warum existiert G?

Betrachte $B = \{ \{x\} \times S_x \mid x \subset A,\ S_x \subset A \cup \{*\},\ S_x$ ist die Menge aller echten oberen Schranken von x (falls eine echte ob. Schranke ex) und $\{*\} = S_x$ sonst $\}$

Nun erhalte $g: B \to V$ Auswahlfkt mit dem Auswahlaxiom
$\{x\} \times S_x \mapsto (x, s_x)$ mit s_x e.o.S. von x falls x eine e.o.S in A hat.

Setze $G(x) = \begin{cases} g[B](x) & \text{falls } x \subset A \\ * & \text{sonst} \end{cases}$

Definiere $F: On \to V$ Funktional mit
$F(\alpha) = G(F[\alpha])$ (ex. nach Rek.satz)

Ang. $* \notin \mathrm{Im}(F) \Rightarrow F: On \to A$ ordnungstreu
(siehe Bew 2.17)
↯ sonst On Menge

Sei α minimal mit $F(\alpha) = *$.
$K = F[\alpha]$ ist lin. geordnete TM von A
K hat keine echte obere Schranke (sonst ↯ zu $F(\alpha) = *$)
$\Rightarrow$ K hat obere Schranke m mit $m \in K$.
m ist maximales Element von A:
Sonst ex. $a \in A$ mit $a > m \Rightarrow a > k$ f.a. $k \in K$
$\Rightarrow$ K hat echte obere Schranke ↯ ☑

Bem: In ZF sind äquivalent:

(1.) Wohlordnungssatz

(2.) Auswahlaxiom — Übung

(3.) Zornsches Lemma

Jetzt: Mächtigkeiten von Mengen

Def: • Mengen a, b heißen gleichmächtig (schreibe $a \sim b$), wenn es eine Bijektion zwischen a und b gibt.

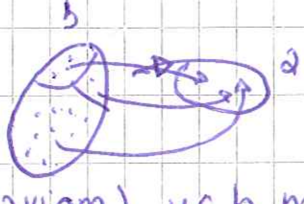
• Wir schreiben $a \precsim b$ (a ist höchstens so mächtig wie b), wenn es eine Injektion von a nach b gibt.

Bem: $a \precsim b$, $a \neq \emptyset \iff$ es ex. Surjektion $f: b \twoheadrightarrow a$.

<u>Bew</u>: "$\Rightarrow$" Sei $g: a \to b$ Injektion, $* \in a \neq \emptyset$

$\Rightarrow$ setze $f: b \to a$, $f(x) = \begin{cases} g^{-1}(x) & x \in Im(g) \\ * & \text{sonst} \end{cases}$

"$\Leftarrow$" $f: b \twoheadrightarrow a$



Für alle $x \in a$

wähle (mit Auswahlaxiom) $y \in b$ mit $f(y) = x$

$\rightsquigarrow$ erhalte Bijektion zwischen a und $c \subseteq b$. $\square$

Wohlordnungssatz $\Rightarrow$ Jede Menge ist gleichmächtig zu einer Ordinalzahl

Aber: nicht eindeutig! $\omega \sim \omega + 1$

Def: Die Mächtigkeit $|a|$ einer Menge a ist die kleinste Ord.zahl α mit $a \sim \alpha$, d.h. $|a| = \min\{\beta \in On \mid \beta \sim a\}$

Lemma 2.19 (1.) $a \sim b \Leftrightarrow |a| = |b|$
(2.) $a \precsim b \Leftrightarrow |a| \leq |b|$

Bew: (1.) $\sim$ ist Äq.relation.

(2.) "$\Leftarrow$" $\underset{\alpha}{|a|} \leq \underset{\beta}{|b|} \Rightarrow \alpha \leq \beta \Rightarrow \alpha \subset \beta$
$\Rightarrow a \precsim b$

"$\Rightarrow$" braucht Hilfssatz

Hilfssatz: Sei $\alpha \in On$, $S \subset \alpha$. Betrachte $(S, <_\alpha)$, also S mit der von α induz. WO. Dann ist der Ordnungstyp von $(S, <)$ (d.h. die OZ β mit $\beta \cong (S, <)$) nicht größer als α.

Bew: Zeige (per Ind über β) $\alpha, \beta \in On$
$f: \beta \to \alpha$ ordnungstreu $\Rightarrow \beta \leq \alpha$. $\beta = \emptyset$ klar

Sei Beh. für alle $\beta' < \beta$ bewiesen

$f: \beta \to \alpha$ ordnungstreu

$\Rightarrow f \restriction_{\beta'}: \beta' \to f \restriction_{\beta'}[\beta']$ ordnungstreu, $f \restriction_{\beta'}[\beta'] \subseteq f(\beta')$

$\overset{I.V.}{\Rightarrow} \beta' \leq f(\beta') \in \alpha$

$\Rightarrow \beta' < \alpha$ f.a. $\beta' < \beta$

$\Rightarrow \beta \leq \alpha$ ☑

Nun $a \precsim b \Rightarrow a \precsim |b| \Rightarrow |a| \leq |b|$ ☑ Lemma

Def: $\alpha \in On$ heißt Kardinalzahl, wenn $\alpha = |\alpha|$ gilt.

Bem: Die Mächtigkeit einer Menge ist immer eine Kard.zahl.

Lemma 2.20 (1.) Natürliche Zahlen sind Kardinalzahlen
(2.) ω ist eine Kardinalzahl.

Bew. zu (1.) zeige (per Ind über n): $n \sim m \Rightarrow n = m$ für $n, m \in \omega$

$n = \underline{0}$ ✓

$n \rightsquigarrow n+1$: Ang $f: n+1 \to m'$ Bijektion, etwa $m' \overset{\neq 0}{=} m+1$

Falls $f(n) = m$, ist $f \restriction_n : n \to m$ Bijektion

I.V. $\Rightarrow n = m \Rightarrow n+1 = m+1$.

Falls $f(x) = m$ für ein $x < n$ ist

$$g(z) = \begin{cases} f(n) & \text{für } z = x \\ f(z) & \text{sonst} \end{cases}$$

Bijektion von n und m. $\overset{\text{wie oben}}{\Rightarrow}$ $n+1 = m+1$.

zu (2.) $n \leq \omega$ f.a. $n \in \omega$

$\Rightarrow |n| \leq |\omega|$ f.a. $n \in \omega$, $n < n+1 = |n+1| \leq |\omega|$ f.a. $n \in \omega$

$\Rightarrow |\omega| = \omega$. ☑

Def 1) a endl. $\Leftrightarrow |a| < \omega$

2) a abzählbar $\Leftrightarrow |a| = \omega$.

Satz 2.21 (Cantor) Für jede Menge a gilt $|a| < |Pot(a)|$.

Bew: $f: a \to Pot(a)$ Abb. Betrachte

$b = \{x \in a \mid x \notin f(x)\}$

Falls f surjektiv ist, ex. $y \in a$ mit $f(y) = b$

$y \in b \Leftrightarrow y \notin f(y) = b$. ↯ ☑

Folgerung 2.22: Es gibt keine größte Kardinalzahl.

Def: Sei κ Kard.zahl

$\kappa^+ :=$ kleinste Kard.zahl, die echt größer als κ ist

Bem: $\kappa^+ \leq |Pot(\kappa)|$.