Lemma 2.14: (1.) On wird durch $\in$ linear geordnet und ist transitiv.

(2.) Jede nicht-leere Teilklasse von On hat ein kleinstes Element

(3.) Jede OZ α ist die Menge ihrer Vorgänger, d.h. $\alpha = \{\beta \in On : \beta < \alpha\}$

(4.) On ist keine Menge.

<u>Bew</u>: Vorüberlegung: Sei $\alpha \in On$, S ein echtes Anfangsstück (d.h. $y \in S, x < y \Rightarrow x \in S$) von α, d.h.

Sei $\beta = \min(\alpha \setminus S) \in \alpha$. Wegen $\beta > s$ f.a. $s \in S$ folgt $S \subset \beta$. Es gilt sogar $\beta = S$

Sei $x \in \beta \setminus S \overset{\alpha \text{ transitiv}}{\Rightarrow} x \in \alpha,\ x < \beta$ ↯ zur Wahl von β.

(1.) Seien α_1, α_2 Ordzahlen. z.z.: α_1, α_2 vergleichbar.

$S := \alpha_1 \cap \alpha_2$ ist Anfangsstück von α_1 und α_2

(Sei $y \in \alpha_1 \cap \alpha_2$, $x < y \overset{\text{Def} <}{\Rightarrow} x \in y \overset{\alpha_1, \alpha_2 \text{ trans.}}{\Rightarrow} x \in \alpha_1, x \in \alpha_2$)

- Sei $S = \alpha_1 \Rightarrow \alpha_1$ Anfangsstück von α_2 $\Rightarrow \alpha_1 \leq \alpha_2$
- Sei $S = \alpha_2 \Rightarrow \alpha_2 \leq \alpha_1$
- Sei $S \neq \alpha_1, \alpha_2 \Rightarrow S = \beta \in \alpha_1, \alpha_2 \Rightarrow \beta \in \alpha_1 \cap \alpha_2$ $\Rightarrow \beta \in S$ ↯ (Transitiv gleich)

(3.) Sei $\alpha \in On$, $x \in \alpha$ z.z.: $x \in On$.

x transitiv: Sei $y \in z \in x \overset{\alpha \text{ trans}}{\Rightarrow} y, z \in \alpha$

$\in$-Ordnung transitiv auf α $\Rightarrow y \in x$.

$(x, \in)$ Wohlordnung, da $x \subset \alpha$ (α transitiv!)

Es folgt: $\alpha = \{x \mid x < \alpha\} = \{x \in On \mid x < \alpha\}$ und On ist transitiv.

(4.) On ist keine Menge, da sonst $On \in On$ gilt.

(2.) Sei $\Sigma \subset On$, $\alpha \in \Sigma$. Sei $A = \{\beta \in \Sigma : \beta \leq \alpha\} \subseteq S(\alpha)$

$S(\alpha)$ wohlgeordnet

$\Rightarrow A$ hat kleinstes Element. ☒

Bem: Aus dem Lemma folgt, dass wir per Induktion über On Beweise führen können:
Sei $U \subset On$ Teilklasse mit für alle α
$$\alpha \subset U \Rightarrow \alpha \in U.$$
Dann gilt $U = On$:
Ang. $U \neq On$, sei $\beta \in On \setminus U$ minimal (nach 2.)
Es gilt $\beta = \underbrace{\{\gamma \in On : \gamma < \beta\}}_{\subset U} \Rightarrow \beta \in U$ ↯

Bem: Es gibt drei Sorten von Ordinalzahlen
- $\alpha = \underline{0}$ also $\alpha = \emptyset$
- $\alpha = S(\beta) = \beta + 1$ 'Nachfolgerzahl', d.h. α hat ein größtes Element
- $\alpha \neq \underline{0}$ keine Nachfolgerzahl → 'Limeszahl' sonst

Def: Eine Klasse A ist ein System von Mengen, die eine Formel $\phi(x, \bar{a})$ mit festgehaltenen Parametern $\bar{a} = a_1, \dots, a_n$ erfüllen. $\{x \mid \phi(x, \bar{a})\}$

Bsp:
- $V = \{x \mid x \text{ Menge}\}$ ~~Alle Menge~~ Klasse aller Mengen
- On Klasse der Ord. zahlen

Bem: A Klasse, x Menge $\overset{\text{Aussonderung}}{\Rightarrow}$ $A \cap x$ Menge.

Def: Ein Funktional $F: A \to V$ ist eine funktionale Klasse von Paaren $A \times V$, d.h. es gilt $\forall x \in A \, \exists! y \, (x, y) \in F$.

Erinnerung (Ersetzungsaxiom):
a Menge, $F: V \to V$ Funktional; dann $F[a]$ Menge.

Satz 2.15: (Rekursionssatz) Zu jedem Funktional $G: V \to V$ existiert ein Funktional $F: On \to V$, s.d. für alle $\alpha \in On$ gilt:

$$F(\alpha) = G(F \upharpoonright \alpha) \qquad (*)$$

Bew: Zeige per Induktion ~~ü~~ über $\beta \in On$:

Für alle $\beta \in On$ gibt es genau eine Funktion $f: \beta \to V$ mit $(*)$ für alle $\alpha \in \beta$.

- Eindeutigkeit: Sei $f': \beta \to V$ eine andere Funktion. Dann ex. ein minimales $\alpha \in \beta$ mit $f(\alpha) \neq f'(\alpha)$. Mit $f \upharpoonright_\alpha = f' \upharpoonright_\alpha$ folgt ~~aus~~ aus $(*)$ $f(\alpha) = f'(\alpha)$
- Existenz (per Induktion)
  Ang., die Beh. ist für alle $\beta' < \beta$ bereits gezeigt. Wir betrachten drei Fälle:
  1. $\beta = 0$ Setze $f = \emptyset$.
  2. $\beta = \beta' + 1$. Sei $f': \beta' \to V$ Funktion, die $(*)$ erfüllt. Setze $f = f' \cup \{(\beta', G(f'))\}$
  3. β Limeszahl Nach Ersetzungsaxiom ist
     $X = \{f': \beta' \to V \mid \beta' < \beta,\ f' \text{ erfüllt } (*)\}$
     eine Menge (zu jedem $\beta' < \beta$ ex. genau ein f')

     Nun ist $\bigcup X = f$ die gewünschte Funktion ☒

Bsp: Definiere für jedes $\alpha \in On$ Menge V_α mittels

$$V_0 = \emptyset$$
$$V_{\alpha+1} = \mathcal{P}(V_\alpha)$$
$$V_\lambda = \bigcup_{\alpha<\lambda} V_\alpha \qquad \lambda \text{ Limeszahl}$$

Die V_α's heißen die von-Neumann Hierarchie.

$V_1 = \{\emptyset\}$, $V_2 = \{\emptyset, \{\emptyset\}\}$ $V_3 = \{\emptyset, \{\emptyset\}, \{\{\emptyset\}\}, \{\emptyset, \{\emptyset\}\}\}$

Erinnerung: Wohlordnung = ~~total~~ linear geordnete Menge, jede nicht-leere Teilmenge hat ein kleinstes Elem.
Jede Ordinalzahl ist durch $\in$ - wohlgeordnet.
Nun: Umkehrung!

Lemma 2.16: Jede Wohlordnung ist genau zu einer Ordinalzahl isomorph. (das heißt On = WO Typen)

Bew: Sei $(W, <)$ Wohlordnung, sei $*$ Menge mit $* \notin W$ (etwa $* = \{W\}$)

Wir suchen Ord.zahl α und Bijektion $f: \alpha \to W$ mit $x < y \Leftrightarrow f(x) < f(y)$

Definiere $F: On \to W \cup \{*\}$ mittels

$$F(\alpha) = G(F\restriction_\alpha) = \begin{cases} \min(W \setminus F[\alpha]) & \text{falls } W \not\subseteq F[\alpha] \\ * & \text{sonst.} \end{cases}$$

Sei $S \subset On$ Anfangsstück mit $F(\alpha) \neq *$ f.a. $\alpha \in S$
$\Rightarrow F\restriction_S$ ordnungserhaltend:
$\beta_1, \beta_2 \in S$
$\beta_1 \leq \beta_2 \Rightarrow F(\beta_1) \leq F(\beta_2)$
$\beta_1 \neq \beta_2 \Rightarrow F(\beta_1) \in F[\beta_2]$, aber $F(\beta_1) \notin F[\beta_1]$
$\beta_1 < \beta_2$
$\beta_2 \leq \beta_1 \Rightarrow F(\beta_2) \leq F(\beta_1)$

Beh: $* \in F[On]$

Sonst $F: On \to W$ ordnungstreu ($\Rightarrow$ injektiv)
$\overset{\text{Ersetzung}}{\Rightarrow}$ On ist Menge ↯ ☑Beh

Sei α minimal mit $F(\alpha) = *$.
Dann gilt $F\restriction_\alpha =: f: \alpha \to W$ ist Funktion, ordnungserhaltend (insbes. inj.)
f ist surjektiv, da $F(\alpha) = * \Rightarrow W \subset F[\alpha]$, d.h.
$f: \alpha \xrightarrow{\sim} W$ ist ordnungstreue Bijektion.

α ist eind. bestimmt: Sei $f': \alpha' \to W$ zweiter Isom.
Dann gilt $F' = f' \cup \{(\beta, *) : \alpha \leq \beta\}$ ebenfalls die Rekursionsgleichung und es folgt
$\alpha = \alpha'$ und $F = F'$. ☑

Bem: nicht nur α, sondern auch $f: \alpha \to W$ eind. bestimmt.