Def: Eine Menge x heißt transitiv, wenn ihre Elemente auch Teilmengen sind
$$z \in y \in x \rightarrow z \in x.$$
Bem: x ist transitiv genau dann, wenn $\bigcup x \subset x$.

Def: x heißt natürliche Zahl, wenn
1. x transitiv ist
2. $\in$ eine lineare Ordnung auf x definiert
3. jede nicht-leere Teilmenge von x bzgl. dieser Ordnung ein kleinstes und ein größtes Elem. besitzt.

folgt bereits aus dem Fundierungsaxiom (Def. funktioniert auch für $ZFC \setminus \{\text{Fundierung}\}$)

Bsp $x = \{\underline{0}, \underline{1}, \underline{2}, \underline{4}, \underline{5}, \underline{6}\}$ nicht transitiv
$\underline{4} \ni \underline{3} \notin x$.

Ziel: $\omega = \{x \mid x \text{ natürliche Zahl}\}$

Lemma 2.9: In ZFC gilt:
(1.) Elemente einer natürlichen Zahl sind natürliche Zahlen
(2.) $\underline{0}$ ist eine natürliche Zahl. Wenn x natürliche Zahl ist, dann auch $s(x)$

$\underline{n}$ ist natürliche Zahl für jedes n.

(3.) Jede natürliche Zahl $\neq \emptyset$ hat die Form $s(x)$ für eine natürliche Zahl x.

Pf (1) Sei x natürliche Zahl, $y \in x$. x transitiv $\Rightarrow y \subset x$.
$\Rightarrow$ y linear geordnet (durch $\in$) und jedes $a \subset y$, $a \neq \emptyset$ hat Min & Max.

Bleibt ~~z~~: y transitiv.

Sei $u \in z \in y \overset{x \text{ transitiv}}{\Rightarrow} z \in x \overset{x \text{ transitiv}}{\Rightarrow} u \in x$

Weil $\in$ linear auf x ist folgt $u \in y$.

2. Einfach, z.B. x transitiv $\Rightarrow$ $s(x)$ auch.

3. Sei $\cancel{y} \neq \emptyset$ natürliche Zahl, und $x \in y$ das größte Elem.

Dann gilt $y = \{z \mid z \in y\} = \{z \in \cancel{y} \mid z \leq x\}$

~~Schreibfehler~~

$= \underbrace{\{z \in y \mid z < x\}}_{\substack{\supseteq x, \text{ da } y \text{ transitiv} \\ \subseteq x, \text{ da } z<x \text{ gdw. } z \in x}} \cup \{x\}$

jedes Elem. von x ist auch Elem. von y

$= \cancel{\{}x \cup \{x\}$ ☑

Lemma 2.10 $\omega := \{x \mid x \text{ ist natürliche Zahl}\}$ ist eine Menge.

Bew: Das Unendlichkeitsaxiom liefert Menge x_0 mit

$\underline{0} \in x_0$ und

$\forall y (y \in x_0 \rightarrow s(y) \in x_0)$

Betrachte $\omega' = \omega \cap x_0$ (Menge nach Aussonderung)

Beh: $\omega = \omega'$.

Ang. ex. $x \in \omega \setminus \omega'$. Sei y das $\in$-kleinste Element von $s(x)$ mit $y \notin \omega'$ (beachte: $x \notin \omega'$, $x \in s(x)$)

Dann $z \in y \overset{s(x) \text{ nat. Zahl}}{\Rightarrow} z \in s(x) \overset{y \text{ min. gewählt}}{\Rightarrow} z \in \omega'$

Wegen $\underline{0} \in \omega'$ folgt $y \neq \underline{0}$, also $y = s(u)$ für ein ~~Abgeschlossen~~ $u \in y$.

ω' abgeschlossen unter s ↯ ☑

Folgerung 2.11 (INDUKTION): Sei $A \subset \omega$ mit $\underline{0} \in A$ und $z \in A \Rightarrow s(z) \in A$. Dann gilt $A = \omega$.

Bew: Wdh. Bew. von 2.10 mit $\omega' = A$.
Beh im ☑

Schreibe ab jetzt $<$ für die $\in$-Relation zwischen nat. Zahlen.

Lemma 2.12:

'$<$' ist Wohlordnung auf ω

1. $<$ ist eine lineare Ordnung auf ω. Jede nicht-leere TM von ω hat ein kleinstes Element
2. Für alle $n \in \omega$ ist $s(n)$ der unmittelbare Nachfolger
3. Alle $n > \underline{0}$ haben einen unmittelbaren Vorgänger

Andere Reihenfolge!

Bew: 1. $<$ ist transitiv, da jedes $x \in \omega$ transitiv.
Zeige: je zwei nat. Zahlen sind vergleichbar per Induktion über n (nach 2.11)
z: Alle $m \in \omega$ sind vergleichbar mit n.
$n = \underline{0}$: Wenn $m = \underline{0}$, dann gilt $m = n$.
Sonst hat m ein kleinstes Elem. x.
m transitiv $\Rightarrow x = \underline{0}$. Also $n < m$.
$n = s(n')$: (I.V.: n' ist mit allen nat. Zahlen vergleichbar)
Möglichkeit 1: $m \leq n' \Rightarrow m < n$.
Möglichkeit 2: $n' < m$
Dann entweder n' größtes Element (nach 2.5) in $m = s(n') \Rightarrow m = n$
oder $s(n') \in m \Rightarrow n < m$. ∎

2. Sei $n < m \leq s(n) \Rightarrow n \in m, n \subseteq m$
$\Rightarrow s(n) \subseteq m$.

3. Vorgänger von n ist das größte Elem. von n. ☑

Satz 2.13 (Rekursionssatz) Gegeben Fkt. $g: A \to B$ und $h: A \times \omega \times B \to B$. Dann ex. eind. bestimmtes $f: A \times \omega \to B$ mit $f(a, \underline{0}) = g(a)$ $f(a, s(n)) = h(a, n, f(a, n))$ f.a. $a \in A$ und $n \in \omega$.

Bew: Halte $a \in A$ fest.

Zeige per Ind. über m: f.a. $m \in \omega$ ex. genau ein $f': s(m) \to B$ mit $\phi(a, m, f')$, wobei

$$\phi(a, m, f') = (f'(\underline{0}) = g(a) \wedge \forall n < m \; f'(s(n)) = h(a, n, f'(n)))$$

I.A. klar, I.S. auch (Existenz sofort klar).

Definiere nun

$$f = \{(a, m, b) \in (A \times \omega \times B) \mid \exists f' \; \phi(a, m, f') \wedge f'(m) = b\}$$

(mit Ersetzungsaxiom!) ☒

Definition: Addition $+: \omega \times \omega \to \omega$ und Multiplikation $\cdot: \omega \times \omega \to \omega$ werden definiert durch die Rekursionsgleichungen:

$$a + \underline{0} = a \qquad a + s(n) = s(a + n)$$

$$a \cdot \underline{0} = \underline{0} \qquad a \cdot s(n) = (a \cdot n) + a$$

Nun (Aufgabe für Sie): (ZFC) $(\omega, +, \cdot)$ ist ein kommutativer Halbring mit 1, d.h. Körperaxiome 1, 2, 4, 5, 6, 7, 8 gelten (10 gilt auch)

§2.3 Ordinalzahlen und Kardinalzahlen (Cantors ML)

Def: Eine Ordinalzahl ist eine transitive Menge, die durch $\in$ linear geordnet wird.

Bsp: Jede natürliche Zahl, ω, $s(\omega) = \omega \cup \{\omega\}$

Schreibe On für die Klasse der Ordinalzahlen.